UNIVERSITÉ PARIS Diderot - Paris 7

UFR de Mathématiques

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

Martin HILS

MATHÉMATIQUES PURES

Année 2013

Contributions à la théorie des modèles des corps

---

soutenue le 9 décembre 2013

Rapporteure interne :
Françoise DELON

Rapporteurs externes :
Ehud HRUSHOVSKI
Bruno POIZAT

Jury :
Jean-Benoît BOST
Zoé CHATZIDAKIS
Françoise DELON
François LOESER
Bruno POIZAT
Frank O. WAGNER
Martin ZIEGLER

Dem Andenken meiner Mutter

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mes collaborateurs scientifiques. Les avancées dans la recherche sont parfois le fruit d'un travail solitaire, mais plus souvent le résultat d'un effort collectif. Les travaux présentés dans mon mémoire en témoignent ; ils doivent beaucoup aux diverses collaborations que j'ai eues au cours des dernières années. Je suis donc naturellement très reconnaissant à mes co-auteurs, mais aussi aux nombreux collègues avec qui j'ai eu des échanges scientifiques fructueux. Je remercie ces derniers plus individuellement dans mes articles.

Je remercie vivement Françoise Delon de présenter mon habilitation, ainsi que mes rapporteurs Ehud Hrushovski et Bruno Poizat d'avoir accepté cette tâche et de l'avoir accomplie en un si bref délai. Merci également à Jean-Benoît Bost, Zoé Chatzidakis, François Loeser, Frank Wagner et Martin Ziegler de m'honorer par leur présence dans le jury.

J'ai apprécié l'accueil chaleureux du département de logique à l'Université Humboldt de Berlin, où j'ai été assistant chez Andreas Baudisch jusqu'à mon recrutement à Paris 7 en 2008. Depuis lors, j'ai trouvé dans l'Équipe de logique de Paris 7 une atmosphère enrichissante scientifiquement et humainement. Les conditions y sont idéales pour évoluer comme chercheur et aussi comme enseignant ; j'ai beaucoup apprécié la possibilité de donner des cours dans le M2 de logique. Je remercie également les membres du DMA de l'École normale supérieure, où j'ai passé trois années merveilleuses à mi-temps.

Je suis très reconnaissant à François Loeser pour son soutien constant depuis mon arrivée à Paris. Un grand merci également à Élisabeth Bouscaren pour les multiples discussions et pour ses conseils précieux.

Je voudrais enfin remercier les équipes administratives de l'Université Humboldt de Berlin et de l'Université Paris 7 pour leur soutien administratif .

Table des matières

Introduction

La théorie des modèles moderne consiste principalement en l'analyse de la catégorie des ensembles définissables dans une structure du premier ordre ou dans une classe de structures donnée. Elle fournit un cadre particulièrement bien adapté à l'étude des corps, éventuellement avec structure supplémentaire.

Dans son travail monumental sur le *programme de classification* en théorie des modèles [B93], Shelah a mis en évidence qu'il est fondamental de comprendre quelles configurations combinatoires peuvent être codées par les ensembles définissables dans les modèles d'une théorie. Dans le cas des théories *stables*, c'est-à-dire des théories dans lesquelles on ne peut pas coder d'ordre linéaire infini, Shelah a développé une théorie magnifique qui sert à analyser les types et les modèles. Il a en particulier montré qu'il existe, dans toute théorie stable, une notion d'indépendance (donnée par la *non-déviation*) ayant de très bonnes propriétés, et qui correspond à l'indépendance linéaire dans un espace vectoriel et à l'indépendance algébrique dans un corps algébriquement clos.

Partant des idées de Zilber dans le cas du rang fini, Poizat, Pillay et surtout Hrushovski ont développé la théorie de la *stabilité géométrique*, révélant des liens profonds entre l'indépendance donnée par la non-déviation dans une théorie stable et les structures algébriques (groupes, corps) qui y sont définissables. Une incarnation importante de cette philosophie est la *Conjecture de trichotomie* due à Zilber, selon laquelle la géométrie donnée par la clôture algébrique dans un ensemble fortement minimal est ou bien triviale, ou bien modulaire (provenant d'un espace vectoriel), ou bien celle d'un corps algébriquement clos.

Dans certains corps avec structure supplémentaire, notamment dans les corps différentiellement clos de caractéristique 0, dans les corps séparablement clos et dans les corps aux différences génériques — dont la théorie sera notée ACFA dans la suite — , (une variante de) la Conjecture de trichotomie est satisfaite, ce qui a joué un rôle fondamental dans les preuves par Hrushovski des conjectures de Manin-Mumford et de Mordell-Lang relative [B60, B59], des applications célébrées de la théorie des modèles à la géométrie diophantienne et à la géométrie algébrique.

Depuis une vingtaine d'années, les méthodes de la stabilité géométrique ont été généralisées avec beaucoup de succès à des contextes instables, d'abord aux théories *simples* (voir [B97]), et plus récemment aux théories NIP (voir [B7, B95]) ; ces généralisations sont parfois regroupées sous le nom de la *néo-stabilité*.

Par exemple, des analogues de la Conjecture de trichotomie ont été établis dans le contexte des théories *o-minimales* (une sous-classe des théories NIP) par Peterzil et Starchenko [B79], et pour ACFA par Chatzidakis, Hrushovski et Peterzil [B32, B35].

La théorie ACFA est le prototype d'une théorie simple et instable. Depuis les travaux de Chatzidakis et Hrushovski [B32], on sait que la théorie des modèles géométrique appliquée à ACFA fournit des outils puissants et efficaces en géométrie algébrique, théorie des nombres et en systèmes dynamiques algébriques ([B60, B89, B63, B33, B34, B76]). Mentionnons en particulier les travaux spectaculaires de Hrushovski [B63] sur le lien entre le Frobenius non-standard et la théorie ACFA.

Quant aux théories NIP, des exemples fondamentaux proviennent (des théories *o*-minimales et) des corps valués. Depuis les travaux d'Ax, Kochen et Ershov, les corps valués ont toujours été une source d'applications profondes de la théorie des modèles. Mais c'est uniquement avec les travaux de Haskell, Hrushovski et Macpherson [B49, B50] sur la théorie ACVF des corps valués algébriquement clos, une théorie NIP (instable) typique, que les méthodes géométriques ont été rendues disponibles dans le contexte valué. Leur résultat de classification des *imaginaires* (c'est-à-dire des 'objets quotients' définissables) dans ACVF, en conjonction avec leur théorie très fructueuse de *domination stable*, constitue une avancée fondamentale. Les travaux récents de Hrushovski et Loeser [B66] sur des propriétés de modération topologique pour les espaces de Berkovich en donnent une belle illustration.

Revenons aux théories stables. Hrushovski a construit des contre-exemples à la Conjecture de trichotomie, utilisant une variante de la méthode d'amalgamation de Fraïssé ([B58, B57]). Zilber a tenté d'expliquer les structures issues de l'amalgamation de Hrushovski par des phénomènes de nature analytique, notamment en établissant des liens avec (des variantes de) la Conjecture de Schanuel. Cette philosophie l'a également amené à des considérations profondes sur l'exponentielle complexe [B100].

Les travaux que nous présentons dans ce mémoire s'inscrivent dans les lignes de recherche décrites ci-dessus, notamment en stabilité géométrique et ses généralisations. Notons aussi qu'il y a, dans ces travaux, un va-et-vient d'idées constant entre le monde modèle-théorique et celui de l'algèbre et de la géométrie algébrique.

Le mémoire comporte deux chapitres assez indépendants, chacun doté d'une introduction détaillée. Dans le premier chapitre, où sont exposés nos articles [A1, A5, A2, A3], nous traitons de la construction, à l'aide des amalgames de Hrushovski, d'un *mauvais corps* de caractéristique 0 ; nous y étudions également un phénomène lié aux multiplicités en théorie de Kummer. Dans la construction du mauvais corps, une grande partie du travail consiste en la vérification de résultats de constructibilité qui sont requis par la méthode d'amalgamation. Un rôle majeur est joué par le *théorème d'Ax*, une version différentielle de la Conjecture de Schanuel.

Le second chapitre, plus court, est une exposition de l'article [A4] en collaboration avec Chernikov. Nous y étudions notamment la théorie VFA_0 du Frobenius non-standard agissant sur un corps valué algébriquement clos de caractéristique 0. Nous déterminons la place de cette théorie dans la hiérarchie de classification de Shelah, en montrant que VFA_0 n'a pas la propriété de l'arbre de seconde espèce, c'est-à-dire est une théorie NTP_2. À la fin du chapitre nous présentons quelques perspectives de recherche en lien avec les thèmes abordés.

Contrairement au cadre du premier chapitre où les outils de la stabilité très classique sont disponibles, nous nous trouvons, dans le second chapitre, confrontés à un contexte où il n'existe pour l'instant que très peu de résultats généraux (par exemple sur la non-déviation). On peut espérer que bien plus d'outils de *néo-stabilité* seront développés dans le futur pour les théories NTP_2.

Notons enfin qu'à l'exception des sections 2 et 6 de [A5], qui contiennent des résultats que j'avais déjà obtenus dans ma thèse de doctorat, les travaux des articles présentés [A1, A5, A2, A3, A4] ont été effectués après la thèse.

Chapitre 1

Autour des mauvais corps

1.1 Introduction

Le rang de Morley est une généralisation de la notion de dimension d'une variété algébrique qu'on peut définir pour les ensembles définissables dans toute structure du premier ordre ; l'analogue du nombre de composantes irréductibles de dimension maximale est le degré de Morley ; une structure est ω*-stable* si le rang de Morley prend des valeurs ordinales ; une structure de rang et degré de Morley 1 est appelée *fortement minimale*.

La *Conjecture de trichotomie* de Zilber affirme que toute structure fortement minimale provient de l'une des trois géométries classiques suivantes : la géométrie triviale (dégénérée) ; la géométrie d'un espace vectoriel sur un corps gauche ; la géométrie de Zariski d'un corps algébriquement clos. Cette conjecture a énormément influencé la théorie des modèles les trois dernières décennies, et tout particulièrement la stabilité géométrique. Elle est fausse en toute généralité [B58] ; néanmoins, Hrushovski et Zilber l'ont vérifiée dans le contexte important des géométries de Zariski ([B67], voir également la monographie [B104]).

Dans sa construction en 1988 d'un contre-exemple à la Conjecture de trichotomie ([B58]), Hrushovski a utilisé une variante de la construction de Fraïssé du modèle homogène-universel d'une classe connexe de structures relationnelles finies ayant la propriété d'amalgamation. La méthode d'amalgamation de Hrushovski a été découpée en deux étapes par Goode [B46] et Poizat : la construction d'une structure générique de rang de Morley infini, puis le collapse en une structure de rang fini. Hrushovski a montré que l'on peut *fusionner* deux structures fortement minimales avec un degré de Morley définissable (DMP) dans des langages dénombrables disjoints en une structure fortement minimale [B57]. Cela montre en particulier que la classe de structures fortement minimales est très vaste, même si l'on se restreint aux expansions fortement minimales d'un corps algébriquement clos. Depuis lors, les amalgames de Hrushovski ont permis de construire un grand nombre de structures nouvelles et souvent inattendues.

Selon la philosophie de Zilber, on devrait pouvoir considérer des structures obtenues par amalgamation, surtout celles avant collapse, comme structures de nature 'analytique' ([B104]). Une autre facette de cette tentative de rapatriement des structures exotiques issues des amalgames de Hrushovski dans le monde des mathématiques classiques est bien plus intéressante pour notre sujet. Zilber a suggéré d'interpréter la positivité de la prédimension, l'un des ingrédients clé des amalgames de Hrushovski, comme une *condition de Schanuel généralisée*, à cause de l'analogie avec la Conjecture de Schanuel selon laquelle pour tout uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ de nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants on a $\operatorname{tr.deg}(y_1, \ldots, y_n, e^{y_1}, \ldots, e^{y_n}/\mathbb{Q}) \geq n$. Cette conjecture est largement ouverte. Ax en a montré une version différentielle [B9]. (Voir la partie 1.2.3.)

Un *mauvais corps* est un corps de rang de Morley fini avec un sous-groupe propre définissable infini du groupe multiplicatif. C'est la notion qui est au centre du présent chapitre. Les mauvais corps ont été introduits en lien avec l'analyse des groupes (simples) de rang de Morley fini, et plus particulièrement l'étude de leurs sous-groupes de Borel [B28]. Selon la *Conjecture d'algébricité* de Cherlin et Zilber, une variante algébrique de la Conjecture de trichotomie, un groupe simple infini de rang de Morley fini devrait être un groupe algébrique.

Au début des années '80, Zilber et Poizat ont demandé si les mauvais corps existent [B28]. En caractéristique positive, leur existence est peu probable [B98] ; en caractéristique 0, Poizat a utilisé des résultats profonds de géométrie pour construire par amalgamation un 'mauvais corps de rang infini' [B85] (appelé *corps vert*). Il se sert notamment du théorème d'Ax mentionné ci-dessus, ou plutôt d'une conséquence de celui-ci, appelée *CIT faible* et établie par Zilber. La CIT faible est un résultat de finitude sur les intersections de variétés algébriques avec des translatés de tores. Elle permet de contrôler les composantes atypiques de telles intersections, c'est-à-dire celles dont la dimension est plus grande que ce qu'on attend génériquement (cf. la partie 1.2.3).

La construction de Poizat justifie donc l'analogie postulée par Zilber. Mentionnons de plus que Zilber a construit, en supposant la Conjecture de Schanuel, un modèle naturel de la théorie du corps vert de Poizat, qui a $\mathbb{C}$ comme ensemble de base et un goût 'analytique' [B102].

Le présent chapitre est organisé autour du collapse du corps vert de Poizat en un mauvais corps. Comme dans la construction du corps vert, la CIT faible est l'ingrédient géométrique clé pour établir les propriétés de définissabilité requises dans le processus de collapse. Elle fournit notamment un *contrôle définissable du rang et de la prédimension.*

Cependant, contrairement à la construction du corps vert, son collapse exige également un *contrôle définissable des multiplicités.* La notion clé est celle d'une variété Kummer-générique. Nous établissons des résultats d'uniformité concernant la Kummer-généricité, qui fournissent en particulier ce qui est nécessaire au collapse, et nous discutons ensuite, dans une section à part, les relations entre contrôle définissable des multiplicité et axiomatisabilité des automorphismes génériques. C'était d'ailleurs notre motivation initiale pour étudier la Kummer-généricité.

Avant de résumer nos propres contributions, nous allons décrire succinctement l'état de l'art antérieur en ce qui concerne les expansions de rang de Morley fini des corps algébriquement clos. Il convient de noter qu'à ce jour, les amalgames de Hrushovski constituent la seule manière connue pour construire de telles expansions.

État de l'art antérieur à nos travaux

À l'aide de la fusion Hrushovski a obtenu des expansions fortement minimales d'un corps algébriquement clos [B57]. Il s'agit des premières expansions de rang de Morley fini d'un tel corps. On peut par exemple construire un ensemble fortement minimal portant deux structures de corps (de caractéristiques différentes si l'on veut) qui soient aussi indépendantes que possible.

Dans [B84], Poizat a construit, en toute caractéristique, un corps de rang de Morley $\omega \cdot 2$ avec un prédicat pour une partie de rang ω (appelé *corps noir*) ; en particulier, sa construction réfutait une conjecture de Berline et Lascar selon laquelle le rang d'un corps ω-stable aurait dû être un monôme de la forme ω^α. Poizat [B84] a également obtenu des structures collapsées ; Baldwin et Holland [B16] ont montré que, sous certaines conditions, ces structures sont ω-saturées et alors ω-stables de rang 2.

Plus tard, Poizat [B85] a construit un corps de caractéristique $p > 0$ de rang de Morley $\omega \cdot 2$ avec un sous-groupe définissable du groupe additif de rang ω (appelé *corps rouge*), et il a conjecturé que l'on peut le collapser en un corps de rang 2 avec un sous-groupe fortement minimal du groupe additif.

Cette conjecture a été vérifiée par Baudisch, Martin Pizarro et Ziegler [B19]. Dans ce cas, la difficulté principale du collapse réside dans le fait qu'il faut travailler 'à translation additive près'. L'outil clé des *suites aux différences*, déjà introduit par Baudisch dans sa construction d'un groupe $\aleph_1$-catégorique exotique [B20], a été affiné dans [B19]. Les corps rouges collapsés ont été le premier exemple d'une expansion de rang de Morly fini d'un corps algébriquement clos ayant un sous-groupe définissable non-algébrique d'un groupe algébrique.

À propos des mauvais corps, citons d'abord un résultat surprenant de Wagner [B98] : s'il existe un mauvais corps en caractéristique $p > 0$, alors l'ensemble des nombres premiers *p-Mersennes*, c'est-à-dire de la forme $\frac{p^n-1}{p-1}$, est fini. Pour cette raison, l'existence de mauvais corps en caractéristique positive est peu probable.

En revanche, comme nous l'avons dit ci-dessus, Poizat [B85] a obtenu un 'mauvais corps de rang infini' en caractéristique 0, c'est-à-dire un corps de rang de Morley $\omega \cdot 2$ avec un sous-groupe divisible sans torsion du groupe multiplicatif définissable de rang ω (corps vert), et il a conjecturé que l'on peut le collapser en un mauvais corps de rang 2.

D'un point de vue algébrique, la construction du corps vert ressemble beaucoup à celle du corps rouge. Par contre, il y a des enjeux majeurs de définissabilité et d'uniformité qui apparaissent. Pour surmonter ces difficultés, Poizat se sert de la CIT faible.

En supposant la *CIT*, une conjecture due à Zilber (cf. la partie 1.2.3) sur les intersections de variétés et de tores, Poizat a également obtenu des corps verts de rang $\omega \cdot 2$ avec un sous-groupe définissable divisible du groupe multiplicatif avec torsion (divisible) prescrite, et il a posé la question si un tel corps vert existait inconditionnellement.

Nos contributions et le plan du chapitre

Nous exposons dans ce chapitre de manière synthétique nos articles [A1],[A5], [A2] et [A3]. Le plan est le suivant.

Nous commençons par une section de préliminaires qui traite des groupes de rang de Morley fini, des amalgames de Hrushovski et de conditions de Schanuel et de leur lien avec des résultats d'uniformité sur les intersections de variétés avec des tores.

Dans la section 1.3, nous présentons les résultats de [A5, A2] sur la Kummer-généricité. Nous y étudions un phénomène lié au changement des multiplicités dans le passage d'une variété semi-abélienne (plus généralement un groupe abélien divisible de rang de Morley fini) à son réduit de pur groupe, surtout du point de vue de la définissabilité.

La section 1.4 est consacrée à une exposition de la construction du mauvais corps de [A1]. Partant de la construction des corps verts de Poizat, nous décrivons les étapes clé du collapse de ces corps verts en des mauvais corps. Nous présentons également les variantes de [A3] avec torsion verte divisible prescrite.

Enfin, dans la section 1.5, nous décrivons les résultats de [A5, A2] sur l'axiomatisabilité de l'automorphisme générique, en particulier en lien avec un contrôle définissable des multiplicités. Nous traitons notamment le cas des groupes de rang de Morley fini, des corps verts et des mauvais corps.

Nous donnons maintenant une présentation plus détaillée de nos résultats. L'objet d'étude principal de la section 1.3 est la notion de Kummer-généricité. Si S est une variété semi-abélienne et $V \subseteq S$ une sous-variété irréductible, V est dite *Kummer-générique* (dans S) si $[n]^{-1}(V) = \{x \in S \mid nx \in V\}$ est irréductible pour tout $n \geq 1$; elle est dite *presque Kummer-générique* s'il existe $N \geq 1$ tel que toute composante irréductible de $[N]^{-1}(V)$ soit Kummer-générique. Enfin, V est dite *libre* si elle n'est contenue dans aucun translaté $t + S'$ d'un sous-groupe algébrique propre S' de S.

Il découle du fait que la torsion est Zariski-dense dans S que toute variété presque Kummer-générique est libre. Dans le cas du tore, où $S = \mathbb{G}_m^n$ est une puissance du groupe multiplicatif, Zilber [B103] a montré la réciproque, c'est-à-dire que toute variété libre est presque Kummer-générique (*Théorème d'existence*).

Dans [A5], nous avons amorcé l'étude des aspects d'uniformité et de définissabilité pour la Kummer-généricité. Nous rendons effective la preuve de Zilber, montrant que si V décrit une famille définissable de variétés libres, il existe un entier N qui convient pour toutes les instances de la famille (*Théorème uniformité*). On en déduit le résultat suivant.

Théorème (1.3.5). *Dans $\mathbb{G}_m^n$, la notion de Kummer-généricité est une propriété définissable : étant donnée une famille définissable $\{V_t\}_{t \in P}$ de sous-*

variétés de $\mathbb{G}_m^n$*, alors* $\{t \in P \mid V_t$ *est Kummer-générique dans* $\mathbb{G}_m^n\}$ *est un ensemble définissable.*

Quelques cas du théorème d'existence avaient été utilisés — sous le nom du 'Thumbtack Lemma' (pour $n = 1$) — par l'école de Zilber dans l'étude modèle-théorique des revêtements universels de certains groupes algébriques commutatifs ([B103, B43, B44, B22]). Le théorème d'existence joue également un rôle dans l'étude de la pseudo-exponentielle de Zilber ([B100], voir aussi [B23]), ainsi que dans la construction des corps verts de Poizat (cf. la partie 1.4.1).

Quant à l'uniformité, notre travail dans [A5] était initialement motivé par une étude des automorphismes génériques des corps verts (cf. la partie 1.5.3), et lié au problème du choix imposé de racines vertes. Il s'avère que l'on est confronté au même problème dans le collapse du corps vert en un mauvais corps, plus précisément dans la construction de codes fortement minimaux. Les résultats d'uniformité et de définissabilité de [A5] permettent alors de combler un trou dans la construction du mauvais corps dans [A1] (cf. la section 1.4).

En collaboration avec Bays et Gavrilovich, j'entame dans [A2] une étude systématique de la Kummer-généricité. En particulier, nous généralisons les théorèmes d'existence et d'uniformité aux variétés semi-abéliennes quelconques et en toute caractéristique, établissant les deux résultats qui suivent.

Théorème (1.3.6). *Soit S une variété semi-abélienne et $V \subseteq S$ une sous-variété irréductible. Alors V est libre si et seulement si elle est presque Kummer-générique.*

Gavrilovich ([B43, B44]) avait montré ce résultat pour les variétés abéliennes en caractéristique 0, par des méthodes homotopiques et d'analyse complexe, en considérant l'action du groupe fondamental sur le revêtement universel de la variété abélienne. Bays ([B22]) a donné une preuve alternative du même résultat, en utilisant le théorème de Lang-Néron (Théorème de Mordell-Weil relatif).

Théorème (1.3.7). *Soit S une variété semi-abélienne. Alors la Kummer-généricité est une propriété définissable dans S.*

La preuve des théorèmes 1.3.6 & 1.3.7 dans [A2] suit une suggestion de Gabber. Elle est complètement différente de celle de [A5] dans le cas du tore et n'utilise pas vraiment de géométrie algébrique. Il s'agit plutôt d'un argument de cohomologie galoisienne. Nous montrons dans [A2] que l'on peut développer les portions nécessaires de la théorie de Kummer dans tout groupe abélien divisible de rang de Morley fini, et nous obtenons donc des résultats analogues d'existence (théorème 1.3.10) et d'uniformité (théorème 1.3.11, en supposant de plus que le groupe ait la DMP) avec ce degré de généralité.

Ces théorèmes abstraits s'appliquent par exemple aux groupes interprétables dans des variétés complexes compactes ainsi qu'aux groupes de rang de Morley fini définissables dans DCF_0, la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique 0 ; nous prouvons aussi une version du théorème d'existence pour les groupes type-définissables de rang de Morley relatif fini (théorème 1.3.16) qui s'applique notamment à certains groupes définissables dans les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini.

Nous en venons maintenant à la section 1.4. Dans sa construction des corps verts, Poizat considère des corps algébriquement clos K de caractéristique 0, avec un sous-groupe divisible sans torsion $\ddot{\mathrm{U}} \leq K^*$ du groupe multiplicatif, et il travaillle avec la fonction de prédimension $\delta(K, \ddot{\mathrm{U}}) = 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}})$, où l. dim désigne la dimension $\mathbb{Q}$-linéaire.

Il obtient ainsi une classe d'amalgamation $(\mathcal{K}_0, \leq)$, avec $\mathcal{K}_0$ la classe des structures de prédimension héréditairement non-négative et $\leq$ la notion d'autosuffisance. (Pour les notions liées aux amalgames de Hrushovski, nous renvoyons à la partie 1.2.2 des préliminaires.) Le corps vert de Poizat est alors la limite de Fraïssé-Hrushovski de (la sous-classe des structures de degré de transcendance fini dans) $(\mathcal{K}_0, \leq)$. On appelle les éléments de $\ddot{\mathrm{U}}$ les *points verts*.

À la base, l'idée pour collapser les corps verts en un mauvais corps est très simple. On interdit une infinité de réalisations des types de dimension 0, ce qui rend ces types algébriques. Les détails techniques du collapse sont assez sophistiqués. Dans [A1], nous essayons de suivre au maximum la stratégie choisie par Baudisch, Martin Pizarro et Ziegler pour le collapse des corps rouges. Les vraies difficultés proviennent des enjeux d'uniformité et de définissabilité.

On désigne par T_{mult} la théorie du groupe pur multiplicatif ; T_{mult} est donc un réduit de ACF_0. Dans les amalgames de Hrushovski, la partie négative de la prédimension est la partie critique. Dans la construction des corps verts, elle est donnée par le rang de Morley dans T_{mult}, d'où l'importance de cette théorie.

Pour illustrer les difficultés qu'on rencontre dans le collapse des corps verts, citons 4 enjeux techniques. Les deux premiers sont également présents dans le collapse des corps rouges, tandis que les deux derniers sont spécifiques aux corps verts.

(A) Puisque nous travaillons au premier ordre, nous sommes obligés de considérer des *approximations* suffisamment bonnes des types que nous voulons rendre algébriques dans le collapse. De plus, ces approximations doivent être uniformes en les paramètres.

(B) T_{mult} est modulaire non-triviale. Les approximations mentionnées en (A) sont donc à construire à translation multiplicative près.

(C) T_{mult} n'est pas ω-catégorique. On ne peut donc pas fixer par une formule le type d'un uplet au sens de T_{mult}.

(D) Dans T_{mult}, on a $\mathrm{dcl} \neq \mathrm{acl}$: la clôture définissable est donnée par le groupe engendré, tandis que la clôture algébrique est donnée par la clôture divisible du groupe engendré. Il faut donc contrôler le changement des multiplicités lors du passage de T_{mult} à ACF_0.

Pour ce qui est du premier enjeu (A), la technique des *codes* développée par Hrushovski (par exemple dans [B57]) suffit pour résoudre les problèmes combinatoires et les problèmes d'uniformité qui se posent. Les *suites aux différences* utilisées par Baudisch, Martin Pizarro et Ziegler dans le collapse du corps rouge

[B19] fournissent un outil élégant et efficace pour affronter la seconde difficulté (B). Étant donné qu'un tore n'a pas de famille continue de sous-groupes algébriques, la construction des suites aux différences est même légèrement plus simple dans les corps verts que dans les corps rouges.

A priori, l'enjeu (C) est le plus sérieux. C'est une coïncidence heureuse que les résultats du type Ax-Schanuel permettent d'effectuer la construction par amalgamation des corps verts. Dans les corps rouges, on se sert constamment du fait que les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels sont localement finis. Dans les corps verts, on peut remplacer chaque occurence de cet argument par un appel à la CIT faible.

Enfin, nos résultats sur la Kummer-généricité suffisent pour résoudre tous les problèmes qui sont liés aux multiplicités (D).

Venons-en à la construction. À l'aide de la CIT faible et de notre résultat de définissabilité de la Kummer-généricité dans $\mathbb{G}_m^n$, nous construisons d'abord un ensemble de *bons codes* (théorème 1.4.11). Il permet de donner une coordinatisation satisfaisante des types de dimension 0 dans les corps verts de Poizat par des familles d'ensembles fortement minimaux.

Notons que dans la construction initiale des codes dans [A1], le problème des multiplicités avait été négligé. Roche a observé que les instances des codes de [A1] ne sont pas toujours fortement minimaux. Comme nous l'avons déjà dit, ce trou a été comblé par les résultats de [A5].

Une fois les bons codes construits, nous pouvons imiter la construction des *suites aux différences* de [B19] (théorème 1.4.12). À l'aide d'une fonction μ à valeurs entières et croissant suffisamment vite, nous définissons une sous-classe élémentaire $\mathcal{K}_0^\mu$ de $\mathcal{K}_0$, interdisant les suites aux différences trop longues. Les propriétés que nous imposons à la fonction μ et aux suites aux différences garantissent alors que la classe $(\mathcal{K}_0^\mu, \leq)$ a la propriété d'amalgamation et que sa limite de Fraïssé-Hrushovski M^μ est ω-saturée. Comme d'habitude dans ce genre de construction, ce dernier fait est établi en axiomatisant la théorie T^μ de M^μ.

Nous prouvons alors le théorème suivant, où le mauvais corps construit est de caractéristique 0, et nous répondons ainsi à la question de Zilber et Poizat mentionnée ci-dessus.

Théorème (1.4.18). *La théorie T^μ est de rang de Morley 2, avec $\ddot{U}$ fortement minimal. En particulier, M^μ est un mauvais corps de rang 2.*

Dans une collaboration avec Caycedo [A3], nous construisons des corps verts de Poizat et des mauvais corps avec torsion verte divisible prescrite. Pour cela, nous montrons que l'on peut remplacer dans la construction de Poizat la CIT par des résultats connus (la CIT faible et le théorème de Laurent), et nous obtenons donc, sans recours à des conjectures ouvertes, un corps vert avec torsion verte égale à un groupe divisible prescrit de racines de l'unité (théorème 1.4.8). Ceci répond à une question de Poizat [B85].

Nous effectuons ensuite, également dans [A3], le collapse en un mauvais corps, en procédant de la même façon que dans le cas sans torsion.

Corollaire (1.4.19). *Pour tout groupe divisible ν de racines de l'unité, il existe un mauvais corps de rang 2 avec Ü fortement minimal et tel que la torsion verte soit donnée par ν.*

Nous passons maintenant à la section 1.5. Si T est une théorie (stable et) modèle-complète, on peut former la théorie T_σ des modèles de T équipés d'un automorphisme fixé. Il est en général intéressant de savoir si T_σ admet une modèle-compagne. Si c'est le cas, on note TA cette modèle-compagne et on dit que l'automorphisme générique est axiomatisable dans T.

L'existence de TA est fortement liée à la possibilité de contrôler définissablement les 'multiplicités' dans la théorie initiale T. Ainsi, l'existence de ACFA est par exemple une conséquence facile du fait que l'irréductibilité est une propriété définissable dans une famille de variétés algébriques ; l'analogue abstrait dans les théories de rang de Morley fini est la DMP. Dans ce mémoire, c'est ce lien qui nous intéresse principalement.

Hasson et Hrushovski ont montré que si T est fortement minimale, alors TA existe si et seulement si T a la DMP [B53]. Dans [A2], nous généralisons ce résultat aux théories presque $\aleph_1$-catégoriques (cf. Définition 1.2.2 et Corollaire 1.5.5). Ceci découle du théorème suivant.

Théorème (1.5.4). *Soit T une théorie stable telle que TA existe. Soit X un ensemble définissable et $T' = \mathrm{Th}(X_{\mathrm{ind}})$ la théorie de la structure induite sur X. On suppose que T' est presque $\aleph_1$-catégorique. Alors T' a la DMP. En particulier, tout groupe de rang de Morley fini interprétable dans T (avec la structure induite) a la DMP.*

Ce résultat s'applique par exemple aux groupes interprétables dans une variété complexe compacte et aux groupes de rang de Morley fini définissables dans DCF_0.

Dans ma thèse de doctorat, j'avais établi un cadre abstrait dans lequel on peut donner des axiomes géométriques pour TA ([B54], voir aussi [A5]). Grâce au théorème 1.3.5 mentionné ci-dessus sur la définissabilité de la Kummer-généricité, nous obtenons dans [A5] un contrôle uniforme des multiplicités dans les corps verts et montrons ainsi qu'ils entrent dans ce cadre abstrait.

Théorème (1.5.10). *Dans les corps verts de Poizat, l'automorphisme générique est axiomatisable.*

Avec les même méthodes, nous montrons que l'automorphisme générique est axiomatisable dans les mauvais corps que nous avons construits dans [A1] (théorème 1.5.12) ; par notre résultat mentionné ci-dessus sur la DMP dans les groupes de rang de Morley fini, ceci équivaut au fait que les mauvais corps ont la DMP. Comme corollaire, nous obtenons l'existence de *mauvais corps pseudo-finis* en caractéristique 0 (Corollaire 1.5.13).

1.2 Préliminaires

1.2.1 Groupes de rang de Morley fini et mauvais corps

Nous donnons dans cette partie une introduction rapide à certains aspects des groupes de rang de Morley fini. Nous motivons en particulier l'introduction de la notion de mauvais corps. Ensuite, nous discutons plus en détail les propriétés du rang de Morley dans ce contexte. Ceci nous servira à plusieurs reprises.

Un *groupe de rang de Morley fini* est la donnée d'une structure M de rang de Morley fini avec une fonction $\emptyset$-définissable $\cdot : M^2 \to M$ telle que $(M, \cdot)$ soit un groupe. De la même façon, on définit la notion de *corps de rang de Morley fini*.

L'exemple typique d'un groupe de rang de Morley fini provient d'un groupe algébrique G défini sur un corps algébriquement clos K. Il suffit de considérer la structure M d'ensemble de base $G(K)$ dans laquelle, pour toute sous-variété V d'une puissance cartésienne de G, où V est définie sur K, l'ensemble $V(K)$ est nommé par un prédicat. Dans M, le rang de Morley correspond à la dimension de Zariski.

Depuis une trentaine d'années, les groupes de rang de Morley fini ont été l'objet de travaux profonds (voir par exemple les monographies [B83], [B28] et [B8]). Les méthodes employées sont principalement inspirées de la théorie des groupes algébriques, mais aussi des groupes finis.

Le fil conducteur est de développer la théorie des groupes de rang de Morley fini en suivant autant que possible l'analogie avec les groupes algébriques. Cette analogie reste même vraie jusqu'à un certain point pour les *groupes stables*, beaucoup plus généraux que les groupes de rang de Morley fini. Ainsi, on peut définir dans tout groupe stable les notions de type générique (Poizat), de stabilisateur et de composante connexe etc., et ces notions ont donné des outils performants pour comprendre ces structures (voir par exemple [B83]).

La force motrice dans le domaine des groupes de rang de Morley fini est la conjecture suivante, une version algébrique de la Conjecture de trichotomie.

Conjecture d'algébricité (Cherlin-Zilber). *Soit G un groupe simple infini de rang de Morley fini. Alors $G = H(K)$, où K est un corps algébriquement clos et H un groupe algébrique (simple) défini sur K.*

Quelques commentaires. Si on lève l'hypothèse de simplicité, il est facile de construire des exemples non-algébriques (par exemple $H_1(K_1) \times H_2(K_2)$, pour K_i des corps algébriquement clos distincts et H_i des groupes algébriques convenables). Si H est un groupe simple sur un corps algébriquement clos K, alors le corps K est interprétable dans la structure du groupe pur $(H(K), \cdot)$, et le groupe pur est donc bi-interprétable avec la structure de groupe algébrique. Enfin, notons que tout corps infini de rang de Morley fini (et même ω-stable) est algébriquement clos, par un résultat classique de Macintyre [B75].

La Conjecture d'algébricité est toujours ouverte. Néanmoins, des cas particuliers (avec des hypothèses sur le sous-groupe de 2-Sylow) sont démontrés

[B8]. En analogie avec la classification des groupes simples finis, une stratégie inductive avait été adoptée depuis le début des années 80. L'un des obstacles qui avait été identifié tôt consistait en l'existence éventuelle de mauvais corps.

Un *mauvais corps* est un corps de rang de Morley fini K dans lequel il existe un sous-groupe propre définissable infini $\ddot{\mathrm{U}} < K^*$ du groupe multiplicatif.

Question 1.2.1 (Zilber (1980), Poizat [B28, p. 352])**.** Existe-t-il un mauvais corps ?

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'un des résultats majeurs présenté dans ce mémoire est la construction d'un mauvais corps en caractéristique 0.

L'existence de mauvais corps ne contredit pas la conjecture d'algébricité. Mais l'absence de mauvais corps aurait simplifié l'analyse des sous-groupes de Borel (sous-groupe résolubles maximaux) d'un groupe G de rang de Morley fini. En effet, un sous-groupe de Borel de G pourrait par exemple être de la forme $K^+ \rtimes \ddot{\mathrm{U}}$, où $(K, \ddot{\mathrm{U}})$ est un mauvais corps interprétable dans G.

Dans ce qui suit, nous exposons quelques résultats autour du rang de Morley dans les groupes de rang de Morley fini.

Notons d'abord que tout groupe simple (infini) de rang de Morley fini, ainsi que tout corps (infini) de rang de Morley fini, est presque fortement minimal. En particulier, il s'agit donc de structures $\aleph_1$-catégoriques (si le langage est dénombrable), et le rang de Morley a de très bonnes propriétés dans ces structures, par des résultats généraux. En fait, ceci est vrai dans tout groupe de rang de Morley fini.

Avant de définir le bon cadre pour notre exposition, fixons quelques notations. Si π est un type partiel, on note $\mathrm{RM}(\pi)$ son rang de Morley, $\mathrm{DM}(\pi)$ son degré de Morley, et $\mathrm{RDM}(\pi)$ la paire $(\mathrm{RM}(\pi), \mathrm{DM}(\pi))$. Nous écrivons $\mathrm{RM}(\overline{a}/C)$ pour $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\overline{a}/C))$.

Dans une théorie de rang de Morley fini, on dit que le rang de Morley est

— *additif* si $\mathrm{RM}(\overline{a}\overline{b}/C) = \mathrm{RM}(\overline{b}/C) + \mathrm{RM}(\overline{a}/C\overline{b})$ pour tout $\overline{a}, \overline{b}$ et C ;

— *définissable* si pour tout entier r et toute formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ il existe une formule $\theta(\overline{z})$ telle que $\mathrm{RM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = r$ si et seulement si $\models \theta(\overline{b})$.

Définition 1.2.2. Une théorie complète T est dite *presque $\aleph_1$-catégorique* si T est non-multidimensionelle, avec toutes ses dimensions fortement minimales, c'est-à-dire s'il existe un ensemble fixé d'ensembles fortement minimaux $\{D_i \mid i \in I\}$ (dans T^{eq} et définis avec paramètres) tel que tout type non-algébrique soit non-orthogonal à l'un des D_i.

Notons que nous ne supposons pas que le langage soit dénombrable, et remarquons que T est presque $\aleph_1$-catégorique si et seulement T^{eq} l'est. De plus, dans une théorie presque $\aleph_1$-catégorique, il n'y a qu'un nombre fini de classes de non-orthogonalité de types fortement minimaux, et on peut donc supposer que I est fini. Nous renvoyons à [B80] pour une discussion des théories presque $\aleph_1$-catégoriques ; en particulier, on y trouve une preuve du fait suivant.

Fait 1.2.3. *Soit T une théorie presque $\aleph_1$-catégorique. Alors, dans T^{eq}, le rang de Morley est fini, définissable, additif et égal au rang* U *de Lascar.*

Le résultat suivant, dû à Lascar, dit que le rang de Morley se comporte extrêmement bien dans les groupes de rang de Morley fini.

Fait 1.2.4 ([B73])**.** *Soit G un groupe de rang de Morley fini et $T = \mathrm{Th}(G)$. Alors T est presque $\aleph_1$-catégorique. En particulier, dans G, le rang de Morley est fini, définissable, additif et égal au rang* U *de Lascar.*

On peut d'ailleurs prendre (une version de) ce résultat comme base pour une approche alternative aux groupes de rang de Morley fini. Poizat montre ainsi que les *groupes de Borovik* (définis de manière axiomatique à l'aide d'une fonction de rang) correspondent précisément aux groupes de rang de Morley fini [B83, Théorème 2.15].

Nous terminons cette partie avec une propriété plus fine qui apparaîtra à plusieurs endroits de ce mémoire.

On dit qu'une théorie T de rang de Morley fini a la *DMP (definable multiplicity property)* si, pour toute paire d'entiers (r, d) et toute formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$, il existe une formule $\theta(\overline{z})$ telle que $\mathrm{RDM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = (r, d)$ si et seulement si $\models \theta(\overline{b})$. (Nous renvoyons à [B57] pour une discussion de la DMP.)

La théorie ACF_p a la DMP. En effet, étant donnée une famille définissable $\{V_t\}_{t\in P}$ de variétés algébriques dans un corps algébriquement clos K, l'ensemble des t tels que V_t soit irréductible est définissable. Il s'ensuit en particulier que tout groupe algébrique sur K a la DMP. On ne sait pas si c'est le cas dans tout groupe de rang de Morley fini (cf. la partie 1.5.2).

1.2.2 Amalgames de Hrushovski

Nous faisons ici un bref survol de la technique d'amalgamation de Hrushovski (voir par exemple [B52] pour une description plus détaillée). Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il s'agit d'une variante de la méthode de Fraïssé qui s'est avérée extrêmement utile pour construire des structures stables, et souvent ω-stables ou même de rang de Morley fini, ayant une prégéométrie prescrite. Nous nous intéressons particulièrement ici aux constructions de nouvelles structures de rang de Morley fini.

En suivant Goode [B46] et Poizat, on peut découper la construction en deux étapes : la constuction d'une structure générique de rang de Morley infini, puis le collapse en une structure de rang fini.

Soient $\mathcal{K}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures, $\mathcal{K}^{fin} \subseteq \mathcal{K}$ la sous-classe des structures 'finiment engendrées' (en un sens à préciser) et $\delta : \mathcal{K}^{fin} \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ une *fonction de prédimension* satisfaisant à quelques conditions naturelles. Au lieu de donner un cadre axiomatique, mentionnons deux exemples qui illustrent bien les phénomènes importants.

Exemples 1.2.5.

(A) **Fusion de deux théories fortement minimales** (Hrushovski [B57])
Pour $i = 1, 2$, soient T_i des $\mathcal{L}_i$-théories fortement minimales ayant la DMP, dans des langages $\mathcal{L}_i$ dénombrables. On suppose que T_1 et T_2 éliminent les quanteurs et que les langages $\mathcal{L}_i$ soient relationnels et disjoints.
Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. On considère la classe $\mathcal{K}$ des modèles de $T_1^\forall \cup T_2^\forall$, et $\mathcal{K}^{fin}$ la sous-classe des structures finies dans $\mathcal{K}$.
Pour $A \in \mathcal{K}^{fin}$, on pose $\delta(A) := \mathrm{RM}_{T_1}(A) + \mathrm{RM}_{T_2}(A) - |A|$.

(B) **Corps rouges** (Poizat [B85])
Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Rings} \cup \{R\}$, où R est un prédicat unaire. On fixe un nombre premier p et on considère la classe $\mathcal{K}$ des $\mathcal{L}$-structures $(K, R(K))$ où $K \models \mathrm{ACF}_p$ et telles que $R(K)$ soit un sous-groupe du groupe additif $(K, +)$. Soit $\mathcal{K}^{fin} := \{(K, R(K)) \in \mathcal{K} \mid \mathrm{tr.deg}(K) < \infty\}$.
Pour $K \in \mathcal{K}^{fin}$, on pose $\delta(K) := 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}_{\mathbb{F}_p}(R(K))$.

Pour $A \subseteq B$ dans $\mathcal{K}^{fin}$ on pose $\delta(B/A) := \delta(B) - \delta(A)$. (Dans les exemples, cette définition s'étend naturellement au cas où A et B sont des éléments de $\mathcal{K}$ et B est finiment engendrée sur A.) On dit que A est *autosuffisant* dans B (ce que l'on désigne par $A \leq B$) si $\delta(B'/A) \geq 0$ pour tout B' avec $A \subseteq B' \subseteq B$ et B' finiment engendré sur A. On pose $\mathcal{K}_0 := \{M \in \mathcal{K} \mid \emptyset \leq M\}$, et on considère la classe $(\mathcal{K}_0, \leq)$, ou plutôt $(\mathcal{K}_0^{fin}, \leq)$, où $\mathcal{K}_0^{fin} = \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}^{fin}$.

Si $M \in \mathcal{K}_0$ et $C \subseteq M$ est une partie quelconque, il existe une plus petite structure $D \in \mathcal{K}_0$ avec $C \subseteq D \leq M$, appelée *clôture autosuffisante* de C et notée $\mathrm{cl}_M(C)$. On obtient une notion de *dimension*, en posant $\mathrm{d}(C) := \delta(\mathrm{cl}_M(C)) = \min\{\delta(C') \mid C \subseteq C' \subseteq M\}$, et de même $\mathrm{d}(a/C) = \delta(\mathrm{cl}_M(Ca)/\mathrm{cl}_M(C))$.

Dans les exemples, on montre :

(a) $\mathcal{K}_0$ est une classe élémentaire ;
(b) la classe $(\mathcal{K}_0^{fin}, \leq)$ a la propriété d'amalgamation (AP) et la propriété du plongement commun (JEP) ;
(c) $\mathcal{K}_0^{fin}$ est dénombrable à isomorphisme près ; plus généralement, pour tout $A \in \mathcal{K}_0^{fin}$, la classe des extensions autosuffisantes $A \leq B$ avec $B \in \mathcal{K}_0^{fin}$ est dénombrable, à $\mathcal{L}_A$-isomorphisme près.

Il suit de (a)-(c) qu'il existe dans $\mathcal{K}_0$ une unique structure dénombrable M_ω qui soit *homogène-universelle* pour la classe $(\mathcal{K}_0^{fin}, \leq)$: pour tout $A \leq B \in \mathcal{K}_0^{fin}$ et $A \leq M_\omega$, il existe un $\mathcal{L}_A$-plongement autosuffisant de B dans M_ω. On appelle M_ω la *limite de Fraïssé-Hrushovski* de la classe $(\mathcal{K}_0^{fin}, \leq)$. Pour que $T_\omega := \mathrm{Th}(M_\omega)$ ait les propriétés voulues, on doit alors montrer que M_ω est saturée (ce qui est le cas dans les exemples (A) et (B)).

La théorie T_ω est en général de rang (de Morley) infini.

Fait 1.2.6 (Poizat [B85])**.** *Dans le cas des corps rouges (B), on a* $\mathrm{RM}(T_\omega) = \omega \cdot 2$ *et R définit un sous-groupe du groupe additif de rang de Morley ω.*

Dans le cas de la fusion (A), sauf dans des contextes dégénérés, on a $\mathrm{RM}(T_\omega) = \omega$ (voir par exemple Hasson et Hils [B52, 6.13]).

La seconde étape, appelée *collapse*, est nécessaire pour obtenir des structures de rang de Morley fini, plus précisément avec d = RM. Cette étape est bien plus sophistiquée. L'idée est de réduire la classe $\mathcal{K}_0$ en bornant uniformément le nombre de réalisations des types de dimension 0 dans T_ω.

Techniquement, ceci est fait en choisissant des familles d'ensembles fortement minimaux dans T_ω, appelées *codes*, qui permettent de donner des 'coordonnées' pour tous les types de dimension 0. On associe ensuite un entier $\mu(\alpha)$ à chacun de ces codes, définissant ainsi une sous-classe élémentaire $\mathcal{K}_0^\mu \subseteq \mathcal{K}_0$. Les points les plus délicats de la construction sont d'assurer que la classe $(\mathcal{K}_0^\mu, \leq)$ ait l'(AP) et que sa limite de Fraïssé-Hrushovski M^μ soit saturée.

Une fois que ceci est réalisé, la théorie $T^\mu := \mathrm{Th}(M^\mu)$ a les propriétés désirées. Si $C \subseteq M \models T^\mu$, la clôture algébrique de C est alors donnée par sa d-clôture $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^M(C) = \{a \in M \mid \mathrm{d}(a/C) = 0\}$.

Revenons aux exemples. La partie (1) du fait suivant est due à Hrushovski [B57] ; la partie (2), conjecturée par Poizat dans [B85], a été établie par Baudisch, Martin Pizarro et Ziegler [B19].

Fait 1.2.7. *1. Dans l'exemple de la fusion (A), T_ω admet un collapse en une théorie fortement minimale T^μ, et on a $T^\mu \supseteq T_1 \cup T_2$.*

2. Dans l'exemple des corps rouges (B), T_ω admet un collapse en une théorie T^μ de rang de Morley 2, avec R sous-groupe fortement minimal du groupe additif du corps.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la construction des mauvais corps en caractéristique 0 de [A1], que nous présentons dans ce mémoire (Section 1.4), suit une idée de Poizat et est analogue à celle des corps rouges (collapsés). En effet, on travaille dans $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{Rings} \cup \{\ddot{\mathrm{U}}\}$, Ü étant un prédicat unaire, et on considère la classe $\mathcal{K}$ des $\mathcal{L}$-structures $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ où $K \models \mathrm{ACF}_0$ et telles que $\ddot{\mathrm{U}}(K) \leq K^*$ soit un sous-groupe divisible sans torsion du groupe multiplicatif de K. On considère la prédimension $\delta(K) := 2\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}}(K))$, où l. dim désigne la dimension linéaire du $\mathbb{Q}$-space vectoriel $\ddot{\mathrm{U}}(K)$.

1.2.3 Conditions de Schanuel et uniformité pour les intersections de variétés avec des tores

Dans les constructions par amalgamation que nous venons de présenter, la positivité de la prédimension est l'un des ingrédients clé. Nous avons mentionné dans l'introduction la philosophie de Zilber selon laquelle on devrait interpréter cette positivité comme une *condition de Schanuel généralisée*. Ce point de vue est effectivement très fructueux.

Dans cette partie, nous exposerons donc quelques résultats et conjectures autour de la Conjecture de Schanuel. D'une part, nous pourrons ainsi introduire des outils importants qui serviront dans la construction des mauvais corps, notamment la CIT faible. D'autre part, cela nous permettra de situer nos travaux dans un contexte plus large, en exhibant des liens avec plusieurs domaines de recherche très actifs en ce moment.

Entrons dans le vif du sujet, et énonçons donc la conjecture qui est à la base des considérations qui vont suivre.

Conjecture de Schanuel (SC). *Soient* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *des nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$. *Alors on a*

$$\mathrm{tr.\,deg}(\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n, e^{a_1}, \ldots, e^{a_n})) \geq n.$$

Cette conjecture est largement ouverte ; on sait qu'elle est vraie si tous les a_i sont des nombres algébriques (théorème de Lindemann-Weierstrass). Kirby [B71] a montré que, dans un sens précis, si (SC) est vraie alors on sait répondre à toutes les questions de transcendance sur l'exponentielle et le logarithme complexes.

Pour $\overline{a} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\delta(\overline{a}) = \mathrm{tr.\,deg}(\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n, e^{a_1}, \ldots, e^{a_n})) - \mathrm{l.\,dim}(\langle \overline{a} \rangle)$, où $\langle \overline{a} \rangle$ désigne le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\overline{a}$, et $\mathrm{l.\,dim}$ la dimension $\mathbb{Q}$-linéaire. Alors (SC) équivaut au fait que δ est non-négative sur $\mathbb{C}$. Zilber [B100] a utilisé cette fonction de prédimension δ dans la classe des corps exponentiels de caractéristique 0 pour construire, par la méthode d'amalgamation de Hrushovski, ses fameux corps avec pseudo-exponentielle (appelés *corps de Zilber*). Il montre qu'en tout cardinal non-dénombrable il existe un unique tel corps, et il conjecture que celui de cardinal $2^{\aleph_0}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ avec l'exponentielle usuelle. Dans sa construction, Zilber est obligé de sortir du cadre de la logique du premier ordre.

Nous citons maintenant le *Théorème d'Ax*, une version différentielle de la Conjecture de Schanuel qui est à l'origine des résultats importants d'uniformité et de définissabilité que nous énonçons ci-dessous.

Fait 1.2.8 (Ax [B9])**.** *Soit* (K, D) *un corps différentiel de caractéristique 0 et de corps des constantes* C, *et soient* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K^*$ *tels que* $Da_i = \frac{Db_i}{b_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, n$. *On suppose que* $Da_1, \ldots, Da_n$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors*

$$\mathrm{tr.\,deg}(C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)/C) \geq n + 1.$$

Contexte et notations. Dans ce qui suit, K désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les variétés considérées sont des sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$ définies sur K (non nécessairement irréductibles).

On note Tor le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{Q}^{alg}$. Le sous-groupe de torsion de $\mathbb{G}_m^n(K)$ est donc donné par Tor^n.

Pour $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{G}_m^n(K) = (K^*)^n$ et $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $\overline{a}^m := \prod_i a_i^{m_i}$. Plus généralement, si M est une matrice $k \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, de lignes $M_1, \ldots, M_k$, on pose $\overline{a}^M := (\overline{a}^{M_1}, \ldots, \overline{a}^{M_k})$.

L'application $\varphi_M : \mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m^k$ qui à $\overline{x}$ associe $\overline{x}^M$ est un homomorphisme de groupes algébriques. Son noyau est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_m^n$, et tous ses sous-groupes algébriques sont de cette forme. Si la matrice M est de rang k, alors $T = \ker(\varphi_M)$ est de dimension de Zariski $n - k$. Un *tore* est un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_m^n$. Si $T \leq \mathbb{G}_m^n$ est un tore et $c \in (K^*)^n$, on note cT le translaté de T par c. Un translaté par un uplet $\gamma \in \mathrm{Tor}^n$ sera appelé un *translaté de torsion.*

Soient U et V deux sous-variétés d'une variété lisse W. Une composante irréductible S de l'intersection $U \cap V$ est dite *atypique* (dans W) si sa dimension est plus grande que celle qu'on attend génériquement, c'est-à-dire si

$$\dim(S) > \dim(U) + \dim(V) - \dim(W). \tag{1.1}$$

Notons que pour toute composante irréductible S, on a l'inégalité $\geq$ dans (1.1).

La conjecture suivante — sur l'intersection de variétés avec des tores — est due à Zilber [B101]. Depuis sa formulation, elle a motivé un grand nombre de travaux. Elle s'inscrit dans le contexte bien plus général de la *Conjecture de Zilber-Pink*. (Pour une discussion plus détaillée, nous référons à la monographie récente de Zannier [B99].)

Conjecture 1.2.9 (CIT)**.** *Soit $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ une sous-variété définie sur $\mathbb{Q}$. Alors il existe un ensemble fini $\mu(V) = \{\gamma_1 T_1, \ldots, \gamma_N T_N\}$ de translatés de torsion de sous-tores propres de $\mathbb{G}_m^n$ tels que, pour tout translaté de torsion d'un tore γT, toute composante atypique S de l'intersection $V \cap \gamma T$ est contenue dans l'un des $\gamma_i T_i$.*

On peut formuler la CIT pour toute variété semi-abélienne. Zilber montre qu'elle entraîne alors la Conjecture de Manin-Mumford ainsi que la Conjecture de Mordell-Lang [B101]. En particulier, elle implique donc le résultat suivant, qui correspond au théorème de Laurent dans le cas où le sous-groupe de rang fini considéré est égal à Tor^n.

Fait 1.2.10 ([B74])**.** *Soit $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ une variété définie sur K. Alors il existe un nombre fini de translatés de torsion de tores $\gamma_1 T_1, \ldots, \gamma_N T_N$ tel que*

$$V \cap \mathrm{Tor}^n = \bigcup_{j=1}^{r} (\gamma_j T_j \cap \mathrm{Tor}^n)\,.$$

Étant donnée une sous-variété irréductible W de $\mathbb{G}_m^n$, son *tore minimal* est le plus petit tore T tel que W soit contenue dans un translaté cT de T. On définit alors la *codimension* de W comme $\mathrm{cd}(W) := \dim(T) - \dim(W) = \mathrm{l.dim}(W) - \dim(W)$, où $\mathrm{l.dim}(W) := \dim(T)$. Une sous-variété fermée irréductible W d'une variété V est dite cd-*maximale dans* V si $\mathrm{cd}(W') > \mathrm{cd}(W)$ pour toute variété irréductible W' avec $W \subsetneq W' \subseteq V$.

En utilisant le Théorème d'Ax (fait 1.2.8), Zilber montre une version de la CIT pour les corps de fonctions.

Fait 1.2.11 (CIT faible [B101, Corollary 3])**.** *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$. Alors il existe un ensemble fini $\{T_1, \ldots, T_N\}$ de sous-tores propres de $\mathbb{G}_m^n$ tels que, pour tout translaté cT d'un tore, le tore minimal de toute composante atypique S de l'intersection $V \cap cT$ est contenu dans l'un des T_i.*

On observe que si V décrit une famille définissable $\mathcal{V}$, on peut trouver par compacité une famille finie de tores qui convienne pour toutes les instances de la famille $\mathcal{V}$.

Remarque 1.2.12. *Kirby a établi l'analogue de la CIT faible pour les variétés semi-abéliennes en caractéristique 0 [B70, Theorem 4.6].*

La reformulation suivante de la CIT faible est due à Poizat. On l'obtient par induction sur la dimension du tore ambiant.

Fait 1.2.13 ([B85, Corollaire 3.7])**.** *Soit $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in P}$ une famille définissable de sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$. Alors il existe un ensemble fini $\tau(\mathcal{V}) = \{T_0, \dots T_N\}$ de tores tels que, pour tout $t \in P$, le tore minimal de toute sous-variété* cd*-maximale de V_t est un élément de $\tau(\mathcal{V})$.*

C'est cette version que nous utilisons constamment dans la construction du mauvais corps. Dans les applications, on observe que les sous-variétés cd-maximales correspondent en quelque sorte à des points extrémaux, et le contrôle des sous-variétés cd-maximales permet alors de contrôler de manière définissable certaines notions liées à la fonction de prédimension δ.

Avant de donner des applications du fait 1.2.13, nous mentionnons un exemple (dû à Bays et Zilber, voir [A1, 2.4]) qui montre que ce résultat ne s'étend pas au cas d'une caractéristique positive.

Exemple. Soit F un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit $V \subseteq \mathbb{G}_m^4$ définie par les équations $x + y = 1$ et $z + u = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit T_n le tore défini par $z^{p^n} = x$ et $u^{p^n} = y$. Alors

— V est irréductible avec $\dim(V) = 2$ et $\mathrm{cd}(V) = 2$;

— $X_n := V \cap T_n$ est une courbe irréductible de tore minimal T_n et on a donc $\mathrm{cd}(X_n) = 1$;

— X_n est une sous-variété cd-maximale de V.

Anticipant la construction des corps verts et des mauvais corps on pose, pour $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ une variété irréductible, $\delta(V) := 2\dim(V) - \mathrm{l.dim}(V) = \dim(V) - \mathrm{cd}(V)$. Si $M \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{Z})$, on note V^M la clôture de Zariski de $\varphi_M(V)$ dans $\mathbb{G}_m^k$. (Donc V^M est égal au lieu de $\overline{a}^M$ sur K, où $\overline{a}$ est générique dans V au-dessus de K.)

Définition 1.2.14. Une variété irréductible $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ est appelée

— *libre* si le tore minimal de V est égal à $\mathbb{G}_m^n$;

— *rotonde* si elle est libre et si $\delta(V^M) \geq 0$ pour toute matrice M à coefficients entiers ;

— *minimale préalgébrique* si V est libre, $\delta(V) = 0$ et $\delta(V^M) > 0$ pour toute matrice M à coefficients dans $\mathbb{Z}$ avec $1 \leq \mathrm{rg}(M) \leq n - 1$.

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ qui porte sur les variétés algébriques est *définissable* si pour toute famille définissable de variétés algébriques $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in P}$, l'ensemble des paramètres t tels que V_t ait la propriété $\mathcal{P}$ est définissable (dans le langage des corps).

Il est facile de voir que la propriété d'être libre est définissable. (Voir page 20.)

Fait 1.2.15 (Kirby [B70])**.** *La rotondité est une propriété définissable.*

Dans [A5, Fact 3.3] nous donnons une preuve de ce résultat, qui utilise le fait 1.2.13. Un argument légèrement plus sophistiqué permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 1.2.16 ([A1, Lemma 4.3]). *La préalgébricité minimale est une propriété définissable.*

1.3 Kummer-généricité et définissabilité

Dans la partie précédente, nous avons exposé des résultats sur la relation entre la dimension de Zariski dans le tore $\mathbb{G}_m^n$ en tant que groupe algébrique, et la dimension linéaire dans sa structure de groupe pur. Dans cette section, nous présentons nos propres travaux sur un autre phénomène, également lié à ce passage du tore, ou plus généralement d'une variété semi-abélienne, à son réduit de groupe pur, un phénomène qui concerne le comportement des *multiplicités* lors de ce passage.

Contrairement aux résultats du type Ax-Schanuel qui sont uniquement valables en caractéristique 0, nous n'avons pas besoin de restriction sur la caractéristique dans cette section. Nous pouvons même nous placer dans le contexte abstrait d'un groupe abélien divisible de rang de Morley fini et établir nos résultats dans cette généralité.

Le plan de la section est le suivant. Dans un premier temps, nous considérons le cas d'une variété semi-abélienne S, en traitant d'abord le cas où $S = \mathbb{G}_m^n$ est une puissance du groupe multiplicatif, puis le cas général. Ensuite, les résultats dans le cas semi-abélien sont généralisés aux groupes abéliens divisibles de rang de Morley fini. Nous terminons la section avec la discussion de quelques exemples et variantes.

1.3.1 Le cas d'une variété semi-abélienne

Soit S une variété semi-abélienne sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Rappelons que cela veut dire qu'il existe une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow A \longrightarrow 1$$

avec $T \cong \mathbb{G}_m^n$ un tore et A une variété abélienne. On sait que la loi de groupe sur S est alors commutative. Elle sera notée $+$ dans la suite.

Pour n un entier, on note $[n] : S \to S$ l'application de multiplication par n.

Dans ce qui suit, nous aurons besoin des propriétés suivantes :

Fait 1.3.1. *Soit S une variété semi-abélienne définie sur un corps algébriquement clos K.*

1. *$(S(K), +)$ est un groupe divisible : pour tout $n \geq 1$, $[n] : S \twoheadrightarrow S$ est surjective avec un noyau fini noté $S[n]$.*

2. *Le sous-groupe de torsion* $\mathrm{Tor}(S) = \bigcup_{n\geq 1} S[n]$ *est Zariski-dense dans* S *; autrement dit, il n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique propre de* S.

Voici les notions qui nous intéressent dans cette section.

Définition 1.3.2. Soit $V \subseteq S$ une sous-variété irréductible de S.
- On dit que V est *libre* (dans S) si V n'est contenue dans aucun translaté $t + S'$ d'un sous-groupe algébrique propre S' de S.
- On dit que V est *Kummer-générique* (dans S) si $[n]^{-1}(V)$ est irréductible pour tout $n \geq 1$.
- On dit que V est *presque Kummer-générique* (dans S) s'il existe $N \geq 1$ tel que toute composante irréductible de $[N]^{-1}(V)$ soit Kummer-générique.

La caractérisation suivante des sous-variétés libres de S, conséquence du théorème des indécomposables de Zilber, nous sera utile dans la suite :

Fait 1.3.3. *Soit* $V \subseteq S$ *irréductible, et soit* $d = \dim(S)$*. On note* $\Sigma : V^d \to S$ *l'application qui à* $(x_1, \ldots, x_d)$ *associe* $\sum x_i \in S$.

Alors V *est libre si et seulement si* $\Sigma(V^d)$ *est générique dans* S.

Comme $\mathrm{Tor}(S)$ est Zariski-dense, il n'est pas difficile à voir que toute variété (presque) Kummer-générique est libre.

En revanche, il existe des variétés libres qui ne sont pas Kummer-génériques. Par exemple, la variété $V = \{(x, y) \mid y = (1 + x)^2\} \subseteq \mathbb{G}_m^2 =: S$ est (irréductible et) libre, mais $[2]^{-1}(V) = \{(x, y) \mid y^2 = (1+x^2)^2\}$ n'est pas irréductible, puisque $(y + 1 + x^2)(y - (1 + x^2)) = y^2 - (1 + x^2)^2$. Les deux composantes irréductibles de $[2]^{-1}(V)$ sont Kummer-génériques, et en particulier V est presque Kummer-générique.

Ce comportement n'est pas un hasard, comme le montre le résultat suivant dû à Zilber [B103].

Fait 1.3.4. *Soit* V *une sous-variété irréductible de* $\mathbb{G}_m^n$*. Alors* V *est libre si et seulement si elle est presque Kummer-générique.*

Zilber [B103] avait énonce ce fait seulement en caractéristique 0 ; dans [B24], Zilber et Bays ont noté que le même argument s'applique en caractéristique positive.

Nous esquissons maintenant l'argument de Zilber [B103] pour montrer le fait 1.3.4. On montre d'abord que si L est un corps de fonctions sur $K = K^{alg}$, alors le quotient des groupes multiplicatifs L^*/K^* est un groupe abélien libre. Pour cela, il suffit de choisir un modèle projectif et normal W de L. On a donc en particulier que $K(W) = L$. L'application qui à $f \in K(W)^*$ associe le diviseur principal correspondant

$$(f) = \sum v_{\mathfrak{p}}(f) \cdot \mathfrak{p} \in \mathrm{Div}(W) = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z} \cdot \mathfrak{p}$$

induit alors un plongement du groupe L^*/K^* dans $\mathrm{Div}(W)$. (Ici, $\mathfrak{p}$ parcourt les points de codimension 1 dans le schéma associé à W, et $v_\mathfrak{p}$ désigne la valuation discrète de $K(W)$ correspondante.)

Si $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ est libre et $(a_1, \ldots, a_n)$ générique dans V sur K, on applique ce résultat à $L = K(a_1, \ldots, a_n)$. Si N est un multiple commun de tous les coefficients $v_\mathfrak{p}(a_i)$ non-nuls, on montre que $\langle \sqrt[N]{a_1}, \ldots, \sqrt[N]{a_n} \rangle / K^*$ est un sous-groupe pur de $K(\sqrt[N]{a_1}, \ldots, \sqrt[N]{a_n})^*/K^*$. On utilise la théorie de Kummer pour en déduire que toute composante irréductible de $[N]^{-1}(V)$ est alors Kummer-générique.

Dans [A5], je montre que l'on peut rendre uniforme la preuve de Zilber. En effet, en utilisant des arguments classiques de théorie des corps valués, j'établis une borne uniforme pour la taille des coefficients $v_\mathfrak{p}(a_i)$ qui peuvent apparaître lorsque V varie dans une famille définissable $\{V_t\}_{t \in P}$. On trouve alors un entier $N \geq 1$ qui convienne pour toutes les variétés de la famille, et V_t est Kummer-générique si et seulement si $[N]^{-1}(V_t)$ est irréductible. Cette uniformité entraîne le résultat de définissabilité suivant.

Théorème 1.3.5 ([A5, Proposition 4.5])**.** *Dans $\mathbb{G}_m^n$, la notion de Kummer-généricité est une propriété définissable : étant donnée une famille définissable $\{V_t\}_{t \in P}$ de sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$, l'ensemble*

$$\{t \in P \mid V_t \text{ est Kummer-générique dans } \mathbb{G}_m^n\}$$

est définissable.

Nous verrons dans la section 1.4 que c'est grâce au fait 1.3.4 que la classe d'amalgamation $(\mathcal{K}_0, \leq)$ considérée par Poizat dans sa construction du corps vert admet un modèle homogène-universel dénombrable. Quant au collapse du corps vert de Poizat sur un mauvais corps, un contrôle uniforme de la Kummer-généricité est indispensable, et le théorème 1.3.5 fournit ce qu'il faut.

Il n'est pas clair comment on pourrait généraliser l'approche de Zilber au cas d'une variété (semi-)abélienne. Ofer Gabber nous avait suggéré une stratégie de preuve des résultats correspondant au fait 1.3.4 ainsi qu'au théorème 1.3.5 dans le cas d'une variété semi-abélienne quelconque. Cette stratégie utilisait le groupe fondamental (étale). L'idée clé est d'exploiter le fait 1.3.3. En collaboration avec Bays et Gavrilovich [A2], nous mettons en place cette stratégie. Plus précisément, nous remplaçons le groupe fondamental par un groupe de Galois approprié et nous donnons une preuve des deux théorèmes suivants. (Notons que ces résultats sont valables en toute caractéristique, et que nous n'avons par exemple pas besoin de l'hypothèse que la variété en question soit ordinaire.)

Théorème 1.3.6 ([A2, Theorem 1.1])**.** *Soit S une variété semi-abélienne et $V \subseteq S$ une sous-variété irréductible. Alors V est libre si et seulement si elle est presque Kummer-générique.*

Théorème 1.3.7 ([A2, Theorem 1.2])**.** *Soit S une variété semi-abélienne. Alors la Kummer-généricité est une propriété définissable dans S : étant donnée une* *famille définissable $\{V_t\}_{t\in P}$ de sous-variétés de S, l'ensemble*

$$\{t \in P \mid V_t \text{ est Kummer-générique dans } S\}$$

est définissable.

Il est clair que l'ensemble en question est type-définissable, puisque l'irréductibilité d'une variété est une propriété définissable en les paramètres. Tout le problème réside en ce qu'il faut montrer l'existence d'un entier N tel que, pour toutes les variétés de la famille, si $[N]^{-1}(V_t)$ est irréductible, alors $[n]^{-1}(V_t)$ est irréductible pour tout n.

Notons que la définissabilité de la presque Kummer-généricité dans S découle du théorème 1.3.6, compte tenu du fait 1.3.3.

Nous avons dit ci-dessus que la preuve de ces deux résultats qui est donnée dans [A2] est formulée dans les seules termes du groupe de Galois. Or, si l'on tient compte des imaginaires, d'après Poizat ([B82]) une théorie de Galois existe dans toute théorie du premier ordre. Nous verrons dans la partie suivante que certains arguments de théorie de Kummer se font dans le contexte abstrait d'un groupe de rang de Morley fini, et que les théorèmes 1.3.6 et 1.3.7 admettent des analogues abstraits dont nous esquisserons la preuve. (Notons également qu'ils sont conséquences de ces analogues abstraits.)

1.3.2 Le cas d'un groupe abélien de rang de Morley fini

Dans cette partie, nous nous plaçons dans un contexte abstrait qui généralise celui d'une variété semi-abélienne sur un corps algébriquement clos. Fixons d'abord le cadre dans lequel nous travaillons :

Contexte 1.3.8. $(S,+)$ est un groupe abélien de rang de Morley fini, définissable dans un modèle M d'une théorie T. On considère S avec toute la structure induite et on suppose que S est stablement plongé. De plus, on suppose :

1. S est divisible : l'application $[n] : S \to S$ est alors surjective avec un noyau fini $S[n]$ ($\subseteq S(M)$) ;
2. le sous-groupe de torsion $\mathrm{Tor}(S) = \bigcup_{n\geq 1} S[n]$ n'est contenu dans aucun sous-groupe propre définissable S' de S.

Nous avons ajouté la condition (2) pour simplifier les énoncés dans la suite. Dans [A2], cette condition n'est pas imposée. En pratique, on se ramène au cas où elle est satisfaite, en remplaçant S par $d(\mathrm{Tor}(S))$, la *clôture définissable* de $\mathrm{Tor}(S)$. C'est le plus petit sous-groupe définissable de S contenant $\mathrm{Tor}(S)$. (Il existe par la DCC pour les groupes définissables dans un contexte ω-stable.)

On dit qu'un type $q(x)$ *étend* S si $q \vdash x \in S$. Soit p un type global qui étend S. On définit un type partiel p_∞ (sur le modèle monstre $\mathbb{U}$) en les variables $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ en posant

$$p_\infty := p(x_1) \cup \{[m](x_{nm}) = x_n \mid m,n \geq 1\}.$$

Une réalisation $(a_i)_{i\geq 1} \models p_\infty$ n'est donc rien d'autre qu'une réalisation a_1 de p avec un choix cohérent de points de divisions.

Définition 1.3.9 ([A2])**.** Soit $p(x)$ un type global qui étend S.

- On dit que p est *libre* si pour tout translaté $t + S'$ d'un sous-groupe définissable propre S' de S on a $p(x) \vdash x \notin t + S'$.
- On dit que p est *Kummer-générique* si p_∞ est un type complet (global).
- On dit que p est *presque Kummer-générique* si p_∞ n'a qu'un nombre fini de complétions.

Si $X \subseteq S$ est définissable avec $\mathrm{DM}(X) = 1$, on note p_X son unique type (global) générique, et on dit que X est *libre* (*Kummer-générique*, *presque Kummer-générique*, respectivement) si p_X l'est.

On montre que si $X \subseteq S$ avec $\mathrm{DM}(X) = 1$, alors X est Kummer-générique si et seulement si $\mathrm{DM}([n]^{-1}(X)) = 1$ pour tout $n \geq 1$, et *presque Kummer-générique* si et seulement si $\mathrm{DM}([n]^{-1}(X))$ est borné indépendamment de n. Il en découle que dans le cas d'une sous-variété irréductible d'une variété semi-abélienne, ces définitions coïncident avec celles que nous avons données auparavant (Définition 1.3.2).

Nous énonçons maintenant les résultats principaux de [A2] concernant la Kummer-généricité dans le contexte 1.3.8. (Nous nous contentons de donner des cas particuliers.)

Théorème 1.3.10 ([A2, Theorem 6.4])**.** *Soit p un type global qui étend S. Alors p est libre si et seulement s'il est presque Kummer-générique.*

Un argument standard montre que tout type presque Kummer-générique est libre. Quant à la réciproque, elle est plus difficile à établir.

Théorème 1.3.11 ([A2, Theorem 6.7])**.** *On suppose que la structure induite sur $(S, +)$ a la DMP. Soit $\{X_t\}_{t\in P}$ une famille définissable de sous-ensembles de S. Alors l'ensemble $\{t \in P \mid X_t$ est Kummer-générique$\}$ est définissable.*

Pour démontrer ces deux théorèmes, dans [A2], nous prouvons le résultat suivant.

Proposition 1.3.12 ([A2, Theorem 6.6])**.** *Soit $\{X_t\}_{t\in P}$ une famille définissable de sous-ensembles libres de S. Alors il existe $N \geq 1$ tel que $\mathrm{DM}([n]^{-1}(X_t)) \leq N$ pour tout $t \in P$ et tout $n \geq 1$.*

Le théorème 1.3.11 suit de cette proposition. En effet, si N est comme dans la proposition, posons $m := N!$. Alors X_t est Kummer-générique si et seulement si $\mathrm{DM}([m]^{-1}(X_t)) = 1$, ce qui est une propriété définissable par la DMP.

Nous esquissons maintenant la preuve du théorème 1.3.10 donnée dans [A2]. Elle est suffisamment uniforme pour démontrer la proposition 1.3.12.

On établit d'abord la caractérisation suivante des types libres, analogue abstrait du fait 1.3.3.

Lemme 1.3.13. *Soit p un type global qui étend S. On suppose que $d = \mathrm{RM}(S)$, et on considère $\Sigma : S^d \to S$, $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_1 + \cdots + x_d$. Alors p est libre si et seulement si $\Sigma_*\left(p^{(d)}\right)$ est le type générique de S.*

Ce lemme est une conséquence de [A2, Lemma 6.1], une version pour les types du théorème des indécomposables de Zilber.

Soit maintenant p un type global qui étend S et qui est libre.

On peut reformuler la Kummer-généricité en termes d'image du groupe de Galois absolu par un 'caractère de Kummer abstrait'. Pour cela, on considère le groupe profini suivant, analogue du module de Tate :

$$T = \varprojlim_n S[n]$$

Ici, la limite est prise par rapport aux applications

$$[m] : S[mn] \to S[n].$$

Soit $X \subseteq S$ avec $\mathrm{DM}(X) = 1$ et tel que $p = p_X$. On suppose que X est défini sur le modèle M, et on choisit $(a_i)_{i\geq 1} \models p_\infty \mid M$. On considère $G = \mathrm{Gal}(Ma_1) := \mathrm{Gal}\left(\mathrm{acl}^{eq}(Ma_1)/Ma_1\right)$, le *groupe de Galois absolu de Ma_1*. L'application

$$\begin{aligned} \theta : G &\to T, \\ \sigma &\mapsto (\sigma(a_n) - a_n)_n \end{aligned}$$

est un homomorphisme continu de groupes profinis, indépendant du choix des a_i, $i \geq 2$. L'image Z de θ est alors un sous-groupe fermé de T, et le quotient T/Z est en bijection naturelle avec l'ensemble des complétions de p_∞.

On termine la preuve par le lemme clé suivant, dont la preuve utilise le lemme 1.3.13.

Lemme 1.3.14. *Avec les notations ci-dessus, on a $\#T/Z \leq \mathrm{DM}(X^d \cap \Sigma^{-1}(a_1))$.*

1.3.3 Exemples et variantes

Nous terminons la section sur la Kummer-généricité par la discussion de quelques variantes et exemples des résultats que nous venons de présenter, tous traités dans [A2].

Exemples 1.3.15 ([A2, Examples 7.1])**.** Tout groupe de rang de Morley fini définissable dans DCF_0 a la DMP. De même, tout groupe interprétable dans une variété complexe compacte est de rang de Morley fini et a la DMP.

En particulier, si un tel groupe satisfait aux conditions données dans 1.3.8, les théorèmes 1.3.11 et 1.3.10 s'appliquent.

Ces théories seront discutées plus en détail dans la partie 1.5.2 sur la DMP dans les groupes de rang de Morley fini.

Un contexte similaire aux groupes de rang de Morley fini dans DCF_0 est celui des groupes type-définissables dans la théorie $\mathrm{SCF}_{p,e}$ des corps séparablement clos de caractéristique $p > 0$ et de degré d'inséparabilité $e \geq 1$.

On sait (voir [B29]) qu'à isomorphisme définissable près, les groupes abéliens divisibles et type-définissables dans $\mathrm{SCF}_{p,e}$ sont de la forme $S^{\#} = \bigcap_n p^n S$, pour une variété semi-abélienne S. Benoist, Bouscaren et Pillay [B27, Proposition 3.23] montrent que dans certains cas, $S^{\#}$ a un rang de Morley relatif fini, en particulier si S est isomorphe au produit d'une variété abélienne et d'un tore. Dans ce cas, le théorème suivant s'applique.

Théorème 1.3.16 ([A2, Theorem 6.5])**.** *Soit S un groupe type-définissable de rang de Morley relatif fini, abélien, divisible et tel que* $\mathrm{Tor}(S)$ *ne soit pas contenu dans un sous-groupe propre relativement définissable de S.*

Alors un type global p qui étend S est libre si et seulement s'il est presque Kummer-générique.

Mentionnons que les résultats que nous avons présentés ont des analogues dans tout contexte d'un groupe abélien de rang de Morley fini muni d'un endomorphisme définissable et surjectif (ou avec plusieurs tels endomorphismes, en supposant qu'ils commutent entre eux).

Par exemple (voir [A2, Remark 2]), si $\mathbb{G}_a$ désigne le groupe additif d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, on peut considérer l'application d'Artin-Schreier $\wp : \mathbb{G}_a^n \to \mathbb{G}_a^n$, qui à $\overline{x}$ associe $(x_i^p - x_i)_i$, ainsi que ses itérées $\wp^{(m)}$. On dit qu'une variété $V \subseteq \mathbb{G}_a^n$ est *libre* si $\Sigma(V^n) \subseteq \mathbb{G}_a^n$ est générique, et que V est *Artin-Schreier-générique* si $\left(\wp^{(m)}\right)^{-1}(X)$ est irréductible pour tout $m \geq 1$. Alors si V est libre, il existe N tel que toute composante irréductible de $\left(\wp^{(N)}\right)^{-1}(V)$ est Artin-Schreier-générique.

Pour finir, nous voudrions présenter une reformulation de la Kummer-généricité adaptée au contexte où il n'y a pas de groupe définissable sous-jacent.

Si S est une variété semi-abélienne définie sur $K = K^{alg}$, on considère T_1 la théorie de la structure S_1 d'ensemble de base $S(K)$, et avec un prédicat pour toute sous-variété (définie sur K) d'un produit cartésien de S.

Soit T_0 le réduit de T_1, où l'on garde uniquement les prédicats pour les sous-groupes algébriques des produits cartésiens de S. (En particulier, l'addition est définissable dans T_0.) On choisit des langages $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$ tels que T_i soit une $\mathcal{L}_i$-théorie, pour $i = 0, 1$. Soit $S_0 = S_1 \restriction_{\mathcal{L}_0}$. On note que S_0 est une structure abélienne, donc elle est en particulier mono-basée.

Remarque 1.3.17 ([A2, Remark 5, p. 24])**.** *Dans le contexte ci-dessus, soit $V \subseteq S$ une sous-variété irréductible définie sur $L = L^{alg} \supseteq K$, et soit p_1 le type $\mathcal{L}_1$-générique de V sur $S(L)$. On a les équivalences suivantes :*

- *V est libre si et seulement si $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est le type générique de S_0.*
- *V est Kummer-générique si et seulement si V est libre et si pour $a \models p_1$, l'application naturelle* $\mathrm{Gal}_{T_1}(La) \to \mathrm{Gal}_{T_0}(La)$ *est surjective.*

On peut se demander si nos résultats s'étendent à des expansions plus générales de théories ω-stables (de rang fini), par exemple dans le contexte des variétés de Shimura. Dans l'étude modèle-théorique du j-invariant, la relation entre l'espace affine de dimension n (avec sa structure de variété algébrique) et son réduit qui est donné par les correspondances de Hecke joue un rôle important, et ce contexte ressemble beaucoup au cas d'une variété semi-abélienne, voir par exemple les travaux récents de Harris [B48].

1.4 Construction de mauvais corps

Ceux de nos résultats qui apparaissent dans cette section proviennent essentiellement de [A1]. Nous exposons aussi les variantes de [A3] du corps verts et du mauvais corps avec torsion verte divisible arbitraire. Les codes utilisés proviennent également de [A3]. En effet, Roche avait observé une lacune liée à la Kummer-généricité dans la preuve du résultat principal de [A1]. Dans [A5] il est expliqué comment on peut combler cette lacune ; dans [A3], la construction de codes améliorés est effectuée et plus de détails sont donnés.

Le plan de cette section est le suivant. Nous exposons d'abord la construction du corps vert de Poizat. Ensuite, nous esquissons la partie technique du collapse du corps vert en un mauvais corps. Nous décrivons en particuliér les codes et les suites aux différences et donnons une idée de leur utilisation dans le collapse. Enfin, nous énonçons nos résultats concernant l'existence de mauvais corps.

1.4.1 Les corps verts de Poizat

Dans cette partie, nous présentons la construction des corps verts de Poizat [B85]. Nous présentons également les variantes avec torsion verte divisible arbitraire de [A3].

Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{Rings} \cup \{\ddot{\mathrm{U}}\}$, où Ü est un nouveau prédicat unaire. On considère la classe $\mathcal{K}$ des $\mathcal{L}$-structures $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ telles que

— $K \models \mathrm{ACF}_0$, et
— $\ddot{\mathrm{U}}(K) \leq K^*$ est un sous-groupe divisible sans torsion du groupe multiplicatif de K.

Suivant Poizat, les éléments de Ü sont appelés *verts*, les autres *blancs*.

On note $\mathrm{l.dim}$ la dimension $\mathbb{Q}$-linéaire dans $K^*/\,\mathrm{Tor}$, et $\mathrm{tr.deg}$ le degré de transcendance. Si A est un sous-ensemble d'un corps algébriquement clos, A^{alg} désigne la clôture algébrique du corps engendré par A.

Soit $K \subseteq L$ deux structures dans $\mathcal{K}$. Si $\mathrm{tr.deg}(L)$ est fini, on pose $\delta(L) = 2\,\mathrm{tr.deg}(L) - \mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}}(L)) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$; de même, si $\mathrm{tr.deg}(L/K)$ est fini, on pose $\delta(L/K) := 2\,\mathrm{tr.deg}(L/K) - \mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}}(L)/\ddot{\mathrm{U}}(K))$, la *prédimension* de L sur K. Comme nous l'avons expliqué dans les préliminaires sur les amalgames de Hrushovski (partie 1.2.2), on obtient une notion d'autosuffisance $K \leq L$, ainsi que la sous-classe

$$\mathcal{K}_0 = \{L \in \mathcal{K} \mid \delta(L') \geq 0 \text{ pour tout } L' = L'^{alg} \subseteq L \text{ avec } \mathrm{tr.deg}(L') < \infty\}.$$

On pose $\mathcal{K}_0^{fin} := \{L \in \mathcal{K}_0 \mid \mathrm{tr.deg}(L) < \infty\}$.

Fait 1.4.1 (Poizat [B85])**.** *La classe $\mathcal{K}_0$ est élémentaire.*

Pour établir ce résultat, Poizat utilise la CIT faible (fait 1.2.13).

Soit $K \leq L$ une extension autosuffisante dans $\mathcal{K}_0$ avec $\mathrm{tr.deg}(L/K)$ fini. Alors l'extension L/K admet une décomposition en une tour d'extensions autosuffisantes minimales $K = L_0 \leq L_1 \leq \cdots \leq L_n = L$.

Soit maintenant L/K une extension autosuffisante minimale. On montre alors qu'elle est de l'un des 3 types suivants :

— (extension *générique blanche*) : $\ddot{\mathrm{U}}(L) = \ddot{\mathrm{U}}(K)$ et $\mathrm{tr.deg}(L/K) = 1$;

— (extension *générique verte*) : $\mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}}(L)/\ddot{\mathrm{U}}(K)) = 1\, \mathrm{tr.deg}(L/K) = 1$;

— (extension *minimale préalgébrique*) : $\delta(L/K) = 0$ et $\delta(L/K') < 0$ pour tout K' avec $K \subsetneq K' = K'^{alg} \subsetneq L$; on a alors $\mathrm{l.dim}(\ddot{\mathrm{U}}(L)/\ddot{\mathrm{U}}(K)) = n \geq 2$ et $L = \big(K\ddot{\mathrm{U}}(L)\big)^{alg}$.

Lemme 1.4.2. *Soient $K \subseteq L$ une extension dans $\mathcal{K}_0$ et $\overline{a}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\ddot{U}(L)$ sur $\ddot{U}(K)$. On pose $V = \mathrm{locus}(\overline{a}/K)$.*

(1) On a $K \leq L$ si et seulement si V est rotonde (cf. Définition 1.2.14).

À partir de maintenant, on suppose de plus que $L = K(\overline{a})^{alg}$.

(2) On a $\delta(L/K) = \delta(V) = \dim(V) - \mathrm{cd}(V)$.

(3) L/K est une extension minimale préalgébrique si et seulement si V est minimale préalgébrique (cf. Définition 1.2.14).

(4) Si V est Kummer-générique et si $K \subseteq L'$ est engendrée par une $\mathbb{Q}$-base verte $\overline{a}'$ telle que $\mathrm{locus}(\overline{a}'/K) = V$, alors l'application $\overline{a} \mapsto \overline{a}'$ s'étend en un $\mathcal{L}_K$-isomorphisme entre L et L'.

Ce lemme met donc en rapport diverses propriétés d'une variété algébrique et les extensions dans $\mathcal{K}_0$ données par le générique de cette variété. (Pour une preuve de (4), voir [A5, Corollary 4.3]. Les autres parties suivent plus ou moins des définitions.)

Fait 1.4.3. *1. La classe $(\mathcal{K}_0, \leq)$ a l'(AP) et la (JEP).*

2. (a) La sous-classe $\mathcal{K}_0^{fin}$ de $\mathcal{K}_0$ est dénombrable à isomorphisme près.

(b) Pour tout $K \in \mathcal{K}_0^{fin}$, la classe des extensions autosuffisantes $K \leq L$ avec $L \in \mathcal{K}_0^{fin}$ est dénombrable, à $\mathcal{L}_K$-isomorphisme près.

À part (2b), ces propriétés sont établies dans [B85]. Quant à (2b), propriété indispensable pour construire une limite (dénombrable) de Fraïssé-Hrushovski, elle découle du fait 1.3.4, compte tenu du lemme 1.4.2(4).

Soit M_ω la limite de Fraïssé-Hrushovski de $(\mathcal{K}_0^{fin}, \leq)$. On utilise la définissabilité de la rotondité (fait 1.2.15) et le fait qu'on peut approximer les génériques vert et blanc par des extensions préalgébriques pour donner une axiomatisation de $T_\omega := \mathrm{Th}(M_\omega)$ et montrer que M_ω est saturée.

On obtient alors le résultat d'élimination des quanteurs suivant : deux uplets $\overline{a}$ et $\overline{a}'$ extraits de modèles M et M' de T_ω ont même type si et seulement s'il existe un $\mathcal{L}$-isomorphisme f entre les clôtures autosuffisantes de $\overline{a}$ et de $\overline{a}'$ qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{a}'$. De plus, la clôture algébrique dans T_ω est donnée par la clôture autosuffisante.

On en déduit le résultat principal de [B85], à savoir l'existence d'un corps vert, qui est un analogue de rang infini d'un mauvais corps.

Fait 1.4.4 ([B85])**.** *La théorie T_ω est ω-stable de rang de Morley $\omega \cdot 2$, avec* $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = \omega$*.*

En supposant la Conjecture de Schanuel (SC), Zilber construit un modèle naturel de T_ω :

Fait 1.4.5 ([B102])**.** *On suppose (SC). Soit $\ddot{U} := \{\exp(t(1+i)+q) \mid t \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}\}$. Alors $(\mathbb{C}, +, \times, \ddot{U}) \models T_\omega$.*

Remarque 1.4.6. *Soit $r \geq 2$ un entier. En travaillant avec la prédimension* $\delta(K) := r\,\mathrm{tr.deg}(K) - (r-1)\,\mathrm{l.dim}(\ddot{U}(K))$*, on peut construire un corps vert de rang de Morley $\omega \cdot r$ avec* $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = \omega$ *([B85]). De même, en analogie avec [B18], la prédimension* $\delta(K) = r\,\mathrm{tr.deg}(K) - \mathrm{l.dim}(\ddot{U}(K))$ *mène à un corps vert de rang de Morley $\omega \cdot r$ avec* $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = \omega \cdot (r-1)$*.*

Nous présentons maintenant une variante avec torsion verte non-triviale. Pour cela, nous fixons un sous-groupe divisible ν du groupe Tor des racines de l'unité, et nous considérons les $\mathcal{L}$-structures $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ telles que

— $K \models \mathrm{ACF}_0$, et
— $\ddot{\mathrm{U}}(K)$ est un sous-groupe divisible du groupe multiplicatif de K, avec $\ddot{\mathrm{U}}(K) \cap \mathrm{Tor} = \nu$.

On désigne par $\mathcal{K}(\nu)$ la classe ainsi obtenue. À l'aide de la fonction δ, on obtient les classes $\mathcal{K}_0(\nu)$, $\mathcal{K}_0^{fin}(\nu)$ comme dans le cas sans torsion verte.

Poizat démontre dans [B85, Corollaire 3.5] que $\mathcal{K}_0(\nu)$ est une classe élémentaire si l'on suppose la CIT (Conjecture 1.2.9), et il demande si cela est vrai inconditionnellement. Dans [A3], nous donnons une réponse positive à cette question, en montrant que l'on peut remplacer l'utilisation de la CIT par une combinaison de la CIT faible (dans la version donnée dans le fait 1.2.13) et du Théorème de Laurent (fait 1.2.10). L'idée pour cela provient de Zilber [B105].

Théorème 1.4.7 ([A3, Theorem 2.3])**.** *Pour tout groupe divisible ν de racines de l'unité, la classe correspondante $\mathcal{K}_0(\nu)$ est élémentaire.*

Les arguments de [B85, Section 3] montrent que si la classe $\mathcal{K}_0(\nu)$ est élémentaire, alors il existe un corps vert avec torsion verte égale à ν. Ainsi, Poizat a montré l'existence de tels corps verts sous l'hypothèse de la CIT.

Compte tenu du théorème 1.4.7, nous obtenons donc le résultat suivant.

Théorème 1.4.8 ([A3, Theorem 4.4])**.** *La limite de Fraïssé-Hrushovski de la classe $(\mathcal{K}_0^{fin}(\nu), \leq)$ a un rang de Morley $\omega \cdot 2$, avec* $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = \omega$*.*

En particulier, inconditionnellement, il existe un corps vert de Poizat avec torsion verte égale à ν.

Une extension autosuffisante $K \leq L$ est dite *préalgébrique* si $\delta(L/K) = 0$. Il suit des résultats de [B85] que si $K \leq M \models T_\omega$ et $\overline{a}$ est un uplet extrait de M, on a $\mathrm{RM}(\overline{a}/K) < \omega$ si et seulement si $\mathrm{d}(\overline{a}/K) = 0$, c'est-à-dire si la clôture autosuffisante de $K\overline{a}$ est une extension préalgébrique de K. De plus, $\mathrm{tp}(\overline{a}/K)$ est fortement minimal si et seulement si c'est une extension minimale préalgébrique. De plus, toute extension préalgébrique se décompose en une tour d'extensions minimales préalgébriques.

Comme nous l'avons expliqué dans la partie 1.2.2, afin de transformer le corps vert de Poizat en un mauvais corps, l'idée est de rendre algébriques les types de dimension 0 dans T_ω, pour obtenir une structure dans laquelle $\mathrm{RM} = \mathrm{d}$. Dans ce procédé appelé *collapse*, nous allons borner, de manière uniforme, le nombre de copies d'une même extension minimale préalgébrique, tout en gardant (AP) dans la classe restreinte.

Étant donné qu'il faudra procéder de manière uniforme, une bonne représentation des extensions minimales préalgébriques est requise. Un premier pas dans cette direction est l'observation suivante. Si $V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ est une variété Kummer-générique et minimale préalgébrique définie sur K, il existe une partie constructible $X \subseteq V$, générique dans V et définie sur K, telle que l'ensemble $X \cap \ddot{\mathrm{U}}^n$ soit fortement minimal. (La construction d'un tel X se fait même uniformément en les paramètres.)

Dans la partie suivante, nous présentons les détails techniques du codage nécessaire. Ce codage fournira une bonne coordinatisation des types de rang de Morley fini.

1.4.2 Codes et suites aux différences

Dans cette partie nous esquissons le cœur technique du collapse des corps verts, en présentant les codes ainsi que la notion de suite aux différences (voir [A1, Sections 4 et 5]). Les deux concepts sont formalisés entièrement dans ACF_0. C'est à leur aide que nous pourrons borner, de manière uniforme, le nombre de réalisations d'une extension minimale préalgébrique.

Nous avons besoin d'un peu d'algèbre linéaire dans le groupe multiplicatif (modulo la torsion).

Un tore $T \subseteq \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{G}_m^n$ est appelé *tore de correspondance* s'il est de dimension n et si $\pi_1(T) = \mathbb{G}_m^n = \pi_2(T)$. Notons qu'à un tore de correspondance correspond une matrice $\Gamma \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{Q})$ qui agit sur le groupe multiplicatif modulo la torsion. Si $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{G}_m^n$ sont des ensembles définissables de degré de Morley 1 et si T est un tore de correspondance, on dit que T induit une *correspondance torique* entre X_1 et X_2 si $(X_1 \times X_2) \cap T$ se projette génériquement sur X_1 et sur X_2. Autrement dit, modulo la torsion, la transformation linéaire correspondant à T envoie un point générique de X_1 sur un point générique de X_2.

Définition 1.4.9. Soit $X \subseteq \mathbb{G}_m^n$ définissable. On dit qu'une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ et un tore T *encodent* X, s'il existe $\overline{b}$ tel que T induise une correspondance torique entre l'ensemble défini par $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ et X. On dit que φ *encode* X si la correspondance correspond à l'identité, c'est-à-dire si $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \sim \psi(\overline{x})$ où $\psi(\overline{x})$ est une formule qui définit X.

Ici, pour deux formules $\psi(\overline{x})$ et $\chi(\overline{x})$, par $\psi \sim \chi$ nous entendons que le rang de Morley de ψ est plus grand que le rang de Morley de la différence symétrique $\psi \Delta \chi$. Si X est l'ensemble défini par $\psi(\overline{x})$, par abus de notation, nous écrivons aussi $X \sim \chi$ au lieu de $\psi \sim \chi$.

Dans la suite, une formule $\psi(\overline{x})$ de degré de Morley 1 est dite *minimale préalgébrique* (*Kummer-générique*, resp.) si l'unique variété V avec $V \sim \psi$ est minimale préalgébrique (Kummer-générique, resp.).

La définition d'un code a d'abord été donnée dans [A1, 4.7]. Dans [A5], des *codes améliorées* sont proposés, tenant compte des phénomènes liés à la Kummer-généricité. Nous donnons la version améliorée de [A3, 3.9].

Définition 1.4.10. Un *code* α est constitué une formula $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{z})$ sans paramètres et des entiers n_α, k_α satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) La longueur de $\overline{x}$ est $n_\alpha = 2k_\alpha$.

(b) $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ est une partie de $\mathbb{G}_m^{n_\alpha}$.

(c) $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ est soit vide soit de rang de Morley k_α et de degré de Morley 1.

(d) Si $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}) \neq \emptyset$, alors $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ est minimale préalgébrique et Kummer-générique, et sa clôture de Zariski $V_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ est irréductible.

(e) Supposons que $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}) \neq \emptyset$. Alors $2\,\mathrm{tr.deg}(\overline{a}/B) - \mathrm{l.dim}(\overline{a}/B) \leq 0$ pour tout $\overline{b} \in B$ et $\overline{a} \models \varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$. De plus, $2\,\mathrm{tr.deg}(\overline{a}/B) - \mathrm{l.dim}(\overline{a}/B) = 0$ si et seulement si $\mathrm{l.dim}(\overline{a}/B) = 0$ ou $\overline{a}$ est B-générique dans $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$.

(f) Si $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}) \neq \emptyset$, alors $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{z})$ encode tout translaté multiplicatif de $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$.

(g) Si $\emptyset \neq \varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}) \sim \varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}')$, alors $\overline{b} = \overline{b}'$.

Notons que (g) entraîne que $\overline{b}$ est la base canonique du type générique de $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$. En particulier, il existe un entier m_α tel que si $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{m_\alpha})$ est une suite de Morley dans une instance $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}')$ de α, alors $\overline{b}' \in \mathrm{dcl}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{m_\alpha})$.

Pour deux codes α et β avec $n_\alpha = n_\beta$, soit $G(\alpha, \beta)$ l'ensemble des tores de correspondance dans $\mathbb{G}_m^{2n_\alpha}$ qui induisent une correspondance torique entre des instances non-vides de α et de β. Alors $G(\alpha, \beta)$ est fini [A1, 4.9]. Ceci permet de contrôler de manière définissable les interactions éventuelles entre α et β. On combine cela avec la définissabilité de la préalgébricité minimale (proposition 1.2.16) et de la Kummer-généricité (théorème 1.3.5) pour obtenir le codage suivant.

Théorème 1.4.11 ([A1, 4.10],[A3, 3.11])**.** *Il existe une collection $\mathcal{C}$ de codes ayant les propriétés suivantes :*

1. *Tout ensemble définissable minimal préalgébrique X est encodé par un $\alpha \in \mathcal{C}$ et un tore de correspondance T.*

2. *Le code $\alpha \in \mathcal{C}$ de (1) est uniquement déterminé par X.*

Dans la suite, on fixe un tel ensemble de codes $\mathcal{C}$ et on appelle un élément de $\mathcal{C}$ un *bon code*.

Si $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda, \overline{f})$ est une suite de Morley dans $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$, dans le but de travailler à translation multiplicative près, on s'intéresse au type de la suite $(\overline{e}_0 \cdot \overline{f}^{-1}, \ldots, \overline{e}_\lambda \cdot \overline{f}^{-1})$. La notion de suite aux différences, objet du théorème suivant, est une approximation de ce type, suffisante pour obtenir les propriétés combinatoires désirées (lemme 1.4.14).)

Théorème 1.4.12 ([A1, Satz 5.5])**.** *Pour tout bon code $\alpha \in \mathcal{C}$ et tout $\lambda \geq m_\alpha$, il existe une formule $\psi_\alpha(\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_\lambda)$ (dont les réalisations seront appelées des* suites aux différences*) satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(h) *Si $\models \psi_\alpha(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$, alors $\overline{e}_i \neq \overline{e}_j$ pour $i \neq j$.*

(i) *Pour toute suite de Morley $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda, \overline{f})$ dans $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ on a*

$$\models \psi_\alpha(\overline{e}_0 \cdot \overline{f}^{-1}, \ldots, \overline{e}_\lambda \cdot \overline{f}^{-1}).$$

(j) *Si $\models \psi_\alpha(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$, il existe un unique $\overline{b}$ tel que $\models \varphi_\alpha(\overline{e}_i, \overline{b})$ pour $i = 0, \ldots, \lambda$, $\overline{b}$ est appelé* paramètre canonique *de la suite. De plus, $\overline{b}$ est définissable sur toute sous-suite de $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$ de longueur m_α.*

(k) *Si $\models \psi_\alpha(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$, alors $\models \psi_\alpha(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_{\lambda'})$ pour tout $m_\alpha \leq \lambda' < \lambda$.*

(l) *Soit $i \neq j$, et soit $\overline{b}$ le paramètre canonique de la suite $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda) \models \psi_\alpha$. S'il existe un tore T dans $G(\alpha, \alpha)$ et $\overline{e}'_j$ tel que $(\overline{e}_j, \overline{e}'_j) \in T$ et si $\overline{e}_i$ est générique dans $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$, alors $\overline{e}_i \not\downarrow_{\overline{b}} \overline{e}'_j \cdot \overline{e}_i{}^{-1}$.*

(m) *Si $\models \psi_\alpha(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$, alors $\models \psi_\alpha(\partial_i(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda))$ pour $i \in \{0, \ldots, \lambda\}$, où*

$$\partial_i(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda) := (\overline{e}_0 \cdot \overline{e}_i{}^{-1}, \ldots, \overline{e}_{i-1} \cdot \overline{e}_i{}^{-1}, \overline{e}_i^{-1}, \overline{e}_{i+1} \cdot \overline{e}_i{}^{-1}, \ldots, \overline{e}_\lambda \cdot \overline{e}_i{}^{-1}).$$

Si $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$ est une suite donnée, on appelle *suite dérivée* toute suite que l'on obtient en appliquant un nombre fini de fois l'un des opérateurs ∂_i, pour $0 \leq i \leq \lambda$. On observe qu'une suite n'a qu'un nombre fini de suites dérivées, et que toute permutation d'une suite en est une suite dérivée.

Nous revenons maintenant au contexte bicolore.

Compte tenu du théorème 1.4.11 et des propriétés des codes, nous obtenons la coordinatisation annoncée de la partie préalgébrique de T_ω.

Lemme 1.4.13. 1. *Soit $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ une instance non-vide d'un code α. Alors la formule $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n_\alpha} \ddot{U}(x_i)$ est fortement minimale dans T_ω.*

2. *Soit L/K une extension minimale préalgébrique. Alors il existe un unique code $\alpha \in \mathcal{C}$ qui encode l'extension L/K, c'est-à-dire pour lequel il existe $\overline{b} \in K$ et une $\mathbb{Q}$-base verte $\overline{a}$ de $\ddot{U}(L)$ sur $\ddot{U}(K)$ tels que $\overline{a}$ soit générique dans $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de K.*

La partie (1) est une conséquence du Lemme 1.4.2(3,4) ; si dans la condition (d) on ne demande pas que les instances des codes soient Kummer-génériques, il y a des contre-exemples.

Le lemme suivant est la clé pour la construction du collapse. Dans sa preuve, on utilise la CIT faible, les propriétés des suites aux différences ainsi que le théorème de Ramsey (fini). Structurellement, c'est surtout grâce à la propriété (l) des suites aux différences que l'on peut prouver un tel résultat ; cette propriété repose d'ailleurs (in fine) sur le fait que dans $\mathbb{G}_m^n$ il n'existe pas de famille continue de sous-groupes algébriques.

Lemme 1.4.14 (Lemme combinatoire [A1, 7.3]). *Pour tout bon code $\alpha \in \mathcal{C}$ et tout entier $n \geq 0$, il existe $\lambda = \lambda_\alpha(n) \geq m_\alpha$ tel que, pour toute extension autosuffisante $M \leq N$ dans $\mathcal{K}_0$ et toute suite aux différences $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$ pour α dans $\ddot{U}(N)$, l'une des deux propriétés suivantes soit satisfaite :*

- *le paramètre canonique d'une suite dérivée de $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$ est dans M ;*
- *la suite $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$ contient une sous-suite de Morley de $\varphi_\alpha(\overline{x}, \overline{b})$ de longueur n au-dessus de M, où $\overline{b}$ est le paramètre canonique de $(\overline{e}_0, \ldots, \overline{e}_\lambda)$.*

1.4.3 Résultats sur les mauvais corps

Dans cette partie, nous exposons le résultat principal de [A1] sur l'existence de mauvais corps, et aussi la variante avec torsion verte non-triviale de [A3]. Pour cela, nous esquissons les grandes lignes de la construction du collapse [A1, Sections 7–11], qui utilise comme ingrédient technique majeur le lemme combinatoire 1.4.14 .

On choisit des fonctions $\mu^*, \mu : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ à fibres finies et vérifiant quelques conditions techniques, notamment

- $\mu^*(\alpha) \geq n_\alpha k_\alpha + 1$;
- $\mu^*(\alpha) \geq \lambda_\alpha(m_\alpha + 1)$, et
- $\mu(\alpha) \geq \lambda_\alpha(\mu^*(\alpha))$, λ_α étant la fonction du lemme combinatoire.

On considère la classe $\mathcal{K}_0^\mu$ des structures $M \in \mathcal{K}_0$ telles que, pour tout bon code α, toute suite aux différences pour α dans $\ddot{U}(M)$ est de longueur $\leq \mu(\alpha)$.

Voici une première conséquence du lemme combinatoire 1.4.14 qui nous permet de *construire* un (candidat pour être un) mauvais corps.

Proposition 1.4.15 ([A1, 9.2]). *La classe $(\mathcal{K}_0^\mu, \leq)$ a l'(AP).*

Soit $\mathcal{K}_0^{\mu,fin}$ la classe des structures dans $\mathcal{K}_0^\mu$ de degré de transcendance fini. Par la proposition 1.4.15 (et le fait 1.4.3(2)), la classe $(\mathcal{K}_0^{\mu,fin}, \leq)$ a une limite de Fraïssé-Hrushovski M^μ. C'est-à-dire que M^μ est l'unique structure dénombrable dans $\mathcal{K}_0^\mu$ qui soit homogène-universelle pour $(\mathcal{K}_0^{\mu,fin}, \leq)$. On pose $T^\mu := \mathrm{Th}(M^\mu)$.

Le prochain résultat, également une conséquence du lemme combinatoire, est l'ingrédient clé pour pouvoir *axiomatiser* M^μ. Grâce à ce résultat, le fait d'être 'existentiellement clos' s'exprime au premier ordre.

Proposition 1.4.16 ([A1, 8.4], voir aussi [A3, 4.7]). *Soit $\alpha \in \mathcal{C}$ un bon code. Alors il existe un énoncé χ_α tel que, pour tout $M \in \mathcal{K}_0^\mu$, on ait $M \models \chi_\alpha$ si et seulement si M n'a pas d'extension préalgébrique minimale dans $\mathcal{K}_0^\mu$ qui soit encodée par α.*

Nous allons maintenant axiomatiser T^μ. Pour cela, nous considérons la théorie $\tilde{T}^\mu$ qui exprime pour une $\mathcal{L}$-structure M :

1. $M \in \mathcal{K}_0^\mu$;
2. $M \models \chi_\alpha$ pour tout bon code $\alpha \in \mathcal{C}$;
3. si M est ω-saturée, alors il existe des éléments $g_i \in \ddot{\mathrm{U}}(M)$, $i \in \mathbb{N}$, tels que $\mathrm{d}(g_1, \ldots, g_n) = n$ pour tout n.

Ce sont des conditions du premier ordre. (Pour la partie (3), ceci est une conséquence de [A1, Lemma 10.3].)

Les modèles ω-saturés de $\tilde{T}^\mu$ sont précisément les structures homogènes-universelles pour la classe $(\mathcal{K}_0^{\mu,fin}, \leq)$ [A1, 10.5]. On en déduit les résultats suivants (voir [A1, Section 10]).

Proposition 1.4.17. *1. On a $\tilde{T}^\mu = T^\mu$.*

2. Deux uplets $\overline{a}$ et $\overline{a}'$ extraits de modèles M et M' de T^μ ont même type si et seulement s'il existe un $\mathcal{L}$-isomorphisme entre les clôtures autosuffisantes de $\overline{a}$ et de $\overline{a}'$ qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{a}'$.

3. T^μ est modèle-complète.

Le théorème suivant s'obtient à partir de cette proposition, compte tenu de ce que les suites aux différences garantissent que, si X est un ensemble minimal préalgébrique dans un modèle M de T^μ, alors l'ensemble des points verts dans $X(M)$ est fini. Rappelons que pour $B \subseteq N \in \mathcal{K}_0$, la d-*clôture* de B est donnée par $\mathrm{cl}_\mathrm{d}^N(B) := \{a \in N \mid \mathrm{d}(a/B) = 0\}$.

Théorème 1.4.18 ([A1, Satz 11.2]). *La théorie T^μ a un rang de Morley 2, avec $\ddot{\mathrm{U}}$ fortement minimal. En particulier, M^μ est un mauvais corps de rang 2.*

Dans les modèles de T^μ, la clôture algébrique est donnée par la d-*clôture. Plus généralement, pour tout uplet $\overline{a}$ et tout ensemble de paramètres B dans un modèle de T^μ, on a*

$$\mathrm{RM}(\overline{a}/B) = \mathrm{U}(\overline{a}/B) = \mathrm{d}(\overline{a}/B).$$

Dans [A3, Section 4], nous montrons que les analogues de la proposition 1.4.17 ainsi que du théorème 1.4.18 restent valables si on considère des corps verts avec une torsion verte égale à ν, pour un groupe divisible de racines de l'unité fixé ν.

Corollaire 1.4.19 ([A3, Theorem 4.10]). *Pour tout groupe divisible de racines de l'unité ν, il existe un mauvais corps de rang 2 avec $\ddot{\mathrm{U}}$ fortement minimal et tel que la torsion verte soit donnée par ν.*

Remarque 1.4.20 ([A1, 11.3]). *Comme dans le cas non-collapsé (voir la remarque 1.4.6), on peut montrer l'existence de mauvais corps de rang r, pour tout entier $r \geq 2$. Il suffit d'utiliser une fonction de prédimension adaptée.*

Remarquons enfin que des constructions similaires aux mauvais corps sont possibles dans le contexte des variétés semi-abéliennes en caractéristique 0, grâce aux résultats de Kirby sur la CIT faible (Remarque 1.2.12) et grâce à la définissabilité de la Kummer-généricité (théorème 1.3.7) dans ce contexte. Ainsi, dans sa thèse [B87], Roche considère certaines expansions de variétés abéliennes simples de dimension >1 par un prédicat pour un sous-groupe non-algébrique (en caractéristique 0).

1.5 Axiomatisabilité des automorphismes génériques

Dans cette section, nous donnons d'abord quelques résultats classiques autour de l'axiomatisabilité des automorphismes génériques ; ensuite, nous discutons, dans les groupes de rang de Morley fini, et plus généralement dans les théories presque $\aleph_1$-catégoriques, la relation entre cette axiomatisabilité et la DMP dans la théorie initiale T ; nous terminons par quelques résultats dans le cas où T est la théorie du corps vert de Poizat ou d'un mauvais corps.

Les travaux présentés dans cette section proviennent des articles [A5] et [A2].

1.5.1 Quelques résultats classiques

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète. On pose $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \cup \{\sigma\}$, où σ est un nouveau symbole de fonction unaire, et l'on considère la $\mathcal{L}_\sigma$-théorie T_σ obtenue en ajoutant à T les axiomes exprimant que σ est un $\mathcal{L}$-automorphisme. Si T est modèle-complète, T_σ est une théorie inductive. La théorie T_σ admet donc une modèle-compagne (notée TA si elle existe) si et seulement si la classe de ses modèles existentiellement clos est élementaire. Dans ce cas, on dit que *l'automorphisme générique est axiomatisable dans T* ou encore que *TA existe*.

Si T est une théorie complète arbitraire, on dit que l'automorphisme générique est axiomatisable dans T si cela est vrai pour une expansion par définition T^* de T avec T^* modèle-complète. Cela ne dépend pas du choix de T^*. Par conséquent, on peut supposer que T élimine les quanteurs, en passant à la Morleyisée de T. De ce fait la question est plutôt celle de l'existence d'une modèle-compagne 'relative'.

On sait que si T a la propriété de l'ordre stricte, alors TA n'existe pas [B69] [1]. Kikyo et Pillay ont conjecturé que l'existence de TA implique la stabilité de T [B68]. Dans ce qui suit, nous mettons l'accent sur les théories stables et nous supposons donc que *T est complète, modèle-complète et stable.*

1. Nous verrons au chapitre 2 qu'il peut être utile dans ce cas de restreindre la classe des automorphismes considérés et d'étudier la modèle-compagne dans la classe restreinte.

Le fait 1.5.1 rassemble quelques résultats dûs à Chatzidakis et Pillay [B31]. Introduisons d'abord quelques notations : dans un modèle (M, σ) de T_σ, on note $\mathrm{acl}(A)$ la clôture algébrique de A au sens de $M^{eq} \models T^{eq}$, et $\mathrm{acl}_\sigma(A)$ désigne l'ensemble $\mathrm{acl}\left(\bigcup_{z\in\mathbb{Z}} \sigma^z(A)\right)$, un sous-ensemble de M^{eq} clos par σ et σ^{-1} et algébriquement clos dans le sens de T^{eq}.

Fait 1.5.1. *Soit T une théorie stable et complète avec l'élimination des quanteurs. On suppose que TA existe.*

1. *La clôture algébrique dans les modèles de TA est donnée par* acl_σ*.*
2. *Pour $A_i \subseteq M_i \models TA$, $i = 1, 2$, on a $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_\sigma}(A_1) = \mathrm{tp}_{\mathcal{L}_\sigma}(A_2)$ si et seulement s'il existe un $\mathcal{L}_\sigma$-isomorphisme entre $\mathrm{acl}_\sigma(A_1)$ et $\mathrm{acl}_\sigma(A_2)$ qui envoie A_1 sur A_2. En particulier, les complétions de TA sont données par les $\mathcal{L}_\sigma$-types d'isomorphisme de* $\mathrm{acl}(\emptyset) = \mathrm{acl}_\sigma(\emptyset)$*.*
3. *Toute complétion $\tilde{T}$ de TA est simple (supersimple si T est superstable), et on a la caractérisation suivante de la non-déviation :*

$$A \underset{B}{\overset{\tilde{T}}{\downarrow}} C \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{acl}_\sigma(AB) \underset{\mathrm{acl}_\sigma(B)}{\overset{T}{\downarrow}} \mathrm{acl}_\sigma(BC).$$

4. *Supposons de plus que T élimine les imaginaires et que tout ensemble algébriquement clos est un modèle de T. Alors toute complétion de TA élimine les imaginaires, et l'ensemble définissable $F = \mathrm{Fix}(\sigma) = \{m \in M \mid \sigma(m) = m\}$ est stablement plongé dans M.*

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, on peut considérer l'existence de TA comme une propriété de la théorie initiale T, fortement liée au contrôle définissable des multiplicités dans T. Dans cette direction, Kudaiberganov a observé que pour une théorie stable T, l'existence de TA implique que T n'a pas la propriété du recouvrement fini. Dans [B17], Baldwin et Shelah ont donné une caractérisation abstraite des théories stables T pour lesquelles TA existe.

Dans bien des cas, si TA existe, on peut l'axiomatiser à l'aide de ce qu'on appelle des *axiomes géométriques.* Ainsi, $(K, \sigma) \models \mathrm{ACF}_\sigma$ est un modèle de ACFA si et seulement si, pour toute variété irréductible $V \subseteq K^n$ et toute sous-variété irréductible $W \subseteq V \times V^\sigma$ telle que les projections de W sur V et sur V^σ soient dominantes, il existe $\overline{a} \in K^n$ tel que $(\overline{a}, \sigma(\overline{a})) \in W$. (Ici, V^σ est la variété que l'on obtient en appliquant σ aux coefficients des polynômes qui définissent V.) L'irréductitibilité d'une variété étant une propriété définissable en les paramètres, cette condition s'exprime par une infinité d'énoncés du premier ordre.

Il est facile de voir ([B31]) que dans une théorie de rang de Morley fini ayant la DMP et où le rang de Morley est additif, on peut axiomatiser TA en utilisant des axiomes géométriques qui ressemblent beaucoup à ceux que nous venons de décrire pour ACFA.

Hasson et Hrushovski ont montré la réciproqueque dans le cas des théories fortement minimales, confirmant ainsi une conjecture de Kikyo et Pillay [B68].

Fait 1.5.2 ([B53]). *Soit T une théorie fortement minimale. Alors TA existe si et seulement si T a la DMP.*

1.5.2 DMP dans les groupes de rang de Morley fini

Nous verrons dans cette partie que le résultat de Hasson et Hrushovski s'étend à un contexte plus général. Disons qu'un type fortement minimal $p(\overline{x})$ est *uniformément fortement minimal* s'il existe une formule fortement minimale $\varphi(\overline{x},\bar{b}) \in p$ et $\theta(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{b})$ telles que si $\models \theta(\bar{b}')$, alors $\varphi(\overline{x},\bar{b}')$ est fortement minimale.

Lemme 1.5.3 ([A2, Proposition 4.9]). *Soit T stable telle que TA existe. Alors, si p et q sont des types fortement minimaux dans T avec $p \not\perp q$ et si p est uniformément fortement minimal, q l'est aussi.*

Le théorème suivant est une conséquence du lemme 1.5.3, compte tenu des propriétés des théories presque $\aleph_1$-catégoriques (fait 1.2.3).

Théorème 1.5.4 ([A2, Corollary 4.10]). *Soit T stable telle que TA existe. Soit X un ensemble définissable et $T' = \mathrm{Th}(X_{\mathrm{ind}})$ la théorie de la structure induite sur X. On suppose que T' est presque $\aleph_1$-catégorique. Alors T' a la DMP.*

En particulier, tout groupe de rang de Morley fini interprétable dans T (avec la structure induite) a la DMP.

Nous obtenons comme corollaire la généralisation du fait 1.5.2 aux théories presque $\aleph_1$-catégoriques.

Corollaire 1.5.5 ([A2, Corollary 4.11]). *Soit T une théorie presque $\aleph_1$-catégorique, par exemple $T = \mathrm{Th}(G)$ pour un groupe de rang de Morley fini G. Alors TA existe si et seulement si T a la DMP.*

Remarquons que l'existence d'un groupe de rang de Morley fini sans la DMP est un problème ouvert, aussi bien dans le cas d'un groupe pur, que dans celui d'un groupe avec structure additionnelle (voir [B28, p. 371]).

Il n'est pas clair comment on pourrait construire un groupe pur de rang de Morley fini sans la DMP. La situation est différente si l'on autorise une structure additionnelle. En effet, il semble plausible que la question suivante ait une réponse positive. Si c'est le cas, il existera même une expansion fortement minimale d'un corps algébriquement clos sans la DMP.

Question 1.5.6. Soit T une théorie fortement minimale dans un langage dénombrable. Existe-t-il (toujours) une expansion fortement minimale T' de T telle que T' n'ait pas la DMP ?

Dans une collaboration en cours avec Thomas Blossier, nous essayons de construire une telle expansion. Notons qu'il existe une théorie fortement minimale, et même modulaire, sans la DMP. Hrushovski [B57] a construit un tel exemple qui est un revêtement double d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Nous terminons cette partie par quelques applications. Soit X une variété (analytique) complexe compacte. On peut la considérer comme une structure du premier ordre en nommant tout sous-ensemble analytique d'une puissance cartésienne de X par un prédicat. Zilber a montré [B104, Theorem 3.4.3] que la structure ainsi obtenue élimine les quanteurs et est de rang de Morley fini. De plus, pour tout n, les sous-ensembles analytiques de X^n sont les fermés d'une topologie noethérienne sur X^n.

Proposition 1.5.7 ([A2, Corollary 5.3])**.** *Soit T la théorie d'une variété complexe compacte. Alors TA existe.*

Dans la preuve, nous utilisons un résultat de Radin ([B86]) qui dit que dans une variété complexe compacte, étant donnée une famille définissable de sous-ensembles, l'irréductibilité est définissable en les paramètres. Plus généralement, nous observons ([A2, Proposition 5.2]) que l'on peut donner des axiomes géométriques pour TA, pour toute théorie T d'une *structure topologique noethérienne ω_1-compacte* (pour les définitions en question, voir [B104] ou [A2, Definition 5.1]) dans laquelle l'irréductibilité est une propriété définissable.

Compte tenu du corollaire 1.5.5, on a le résultat suivant. (Notons que l'irréductibilité de Y n'entraîne pas toujours que $\mathrm{DM}(Y) = 1$ dans ce contexte ; la DMP ne se déduit donc pas directement du résultat de Radin.)

Corollaire 1.5.8 ([A2, Corollary 5.4])**.** *Soit T la théorie d'une variété complexe compacte. On suppose que T est presque $\aleph_1$-catégorique. Alors T a la DMP.*

Dans le cas particulier où T est unidimensionelle, Radin ([B86]) avait obtenu ce résultat par une méthode plus directe.

Exemples 1.5.9.
1. Tout groupe définissable dans la théorie d'une variété compacte complexe a la DMP. (On sait que ces groupes sont définissablement isomorphes à des extensions définissables de groupes définissablement compactes par des groupes algébriques linéaires, voir [B81],[B91].)
2. Tout groupe de rang de Morley fini définissable dans DCF_0 a la DMP. (On sait que ces groupes sont définissablement isomorphes à des groupes de la forme $(G,s)^\# = \{x \in G \mid s(x) = \delta x\}$, où (G,s) est un 'D-groupe algébrique', voir [B72].)

Pour pouvoir appliquer le corollaire 1.5.5 dans le cas de DCF_0, il suffit de remarquer que la théorie DCF_0A existe, par un résultat de Hrushovski (voir Bustamante [B30] pour une preuve).

1.5.3 Automorphismes génériques des corps verts de Poizat et des mauvais corps

Dans ma thèse de doctorat [B54] (voir aussi [A5]), j'ai donné un cadre général qui garantit l'existence d'axiomes géométriques pour TA, dans le cas d'une théorie stable T. Les axiomes pour DCF_0A donnés par Bustamante dans [B30] peuvent être vus comme une instance de ce cadre général ; c'est également le cas pour les structures abéliennes ω-stables ainsi que pour les théories de rang de Morley fini et additif ayant la DMP ([B31]), que nous avons mentionnées dans la partie précédente.

Dans bien des structures ω-stables obtenues par la méthode d'amalgamation de Hrushovski (sans collapse, donc de rang de Morley infini), il est facile de donner des axiomes géométriques pour l'automorphisme générique. C'est le cas par exemple pour la *fusion libre* de deux théories fortement minimales ayant la DMP ([B57, B52]), ainsi que pour les *corps noirs* en caractéristique arbitraire ([B84]) et les *corps rouges* en caractéristique positive ([B85]). Par contre, dans les corps verts de Poizat, si on ne se sert que des ingrédients utilisés dans la construction de T_ω par Poizat, c'est-à-dire de la CIT faible, on obtient uniquement un bon contrôle définissable de la prédimension δ et donc du rang. Néanmoins, à l'aide de la CIT faible, Evans [B41] a réussi à montrer que T_ω n'a pas la propriété du recouvrement fini.

Afin de contrôler les multiplicités de manière uniforme dans les corps verts, un contrôle définissable de la Kummer-généricité semble indispensable. Et c'est grâce au théorème 1.3.5 qu'on peut donner des axiomes géométriques pour $T_\omega A$ et donc obtenir le résultat suivant.

Théorème 1.5.10 ([A5, Theorem 5.2]). *Dans les corps verts de Poizat, l'automorphisme générique est axiomatisable.*

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, c'est la preuve de ce résultat qui a motivé notre étude des aspects de définissabilité concernant la notion de Kummer-généricité.

Remarque 1.5.11. *Le théorème 1.5.10 (et sa preuve donnée dans [A5]) reste valable si on considère les variantes du corps vert de Poizat en rang supérieur $\omega \cdot r$ pour $r > 2$ (voir la remarque 1.4.6) ou bien celles du théorème 1.4.8 avec torsion verte divisible arbitraire.*

Nous passons maintenant aux structures collapsées. Il est facile de voir que les théories suivantes (après collapse, donc de rang de Morely fini) ont la DMP : la fusion de deux théories fortement minimales ayant la DMP ([B57]), les corps noirs en caractéristique arbitraire ([B16]), et les corps rouges en caractéristique positive ([B19]).

Comme dans le cas non-collapsé, l'ingrédient principal pour prouver le résultat suivant est la définissabilité de la Kummer-généricité (théorème 1.3.5).

Théorème 1.5.12 ([A5, Theorem 5.4 & 5.5]). *Soit T^μ la théorie du mauvais corps du théorème 1.4.18. Alors T^μ a la DMP. En particulier, $T^\mu A$ existe.*

De plus, le réduit de $T^\mu A$ au langage $\mathcal{L}_{rings} \cup \{\sigma\}$ est égal à ACFA_0.

Rappelons que le sous-corps fixé par σ d'un modèle de ACFA_0 est un corps pseudo-fini de caractéristique 0 ; réciproquement, tout corps pseudo-fini de caractéristique 0 est sous-structure élémentaire du corps fixe d'un modèle de ACFA_0 [B32]. (On sait même qu'il est égal à un tel corps fixe, par un résultat d'Afshordel, mais nous n'avons pas besoin de ce résultat.)

Notons aussi que tout corps pseudo-fini est supersimple de rang SU égal à 1 (voir par exemple [B61]).

Le corollaire suivant affirme alors l'existence de structures que l'on pourrait qualifier de *mauvais corps pseudo-finis* en caractéristique 0. Il s'obtient à partir du théorème 1.5.12 en considérant la sous-structure donnée par $\mathrm{Fix}(\sigma)$. Dans la preuve, on se sert du fait 1.5.1(4) pour montrer que $\mathrm{Fix}(\sigma)$ est stablement plongé. (Par un résultat de Wagner [B96], si M est un corps de rang de Morley fini, alors $\mathrm{Th}(M)$ élimine les imaginaires, et tout sous-ensemble infini algébriquement clos de M est une sous-structure élémentaire.)

Corollaire 1.5.13 ([A5, Corollary 5.6])**.** *Soit F' un corps pseudo-fini de caractéristique 0. Alors il existe $F \succcurlyeq F'$ et un sous-groupe propre infini $\ddot{U}$ du groupe multiplicatif de F, avec $\ddot{U}$ divisible et sans torsion, tel que la structure $(F, +, \times, \ddot{U})$ soit supersimple de rang* SU *égal à 2, avec* $\mathrm{SU}(\ddot{U}) = 1$.

Remarque 1.5.14. *Comme dans le cas non-collapsé, le théorème 1.5.12 ainsi que son corollaire restent valables si l'on considère les variantes en rang de Morley supérieur r pour $r > 2$ (voir Remarque 1.4.20) ou bien celles du corollaire 1.4.19 avec torsion verte divisible arbitraire.*

Chapitre 2

Corps valués aux différences et NTP_2

2.1 Introduction

Depuis les travaux d'Ax-Kochen [B10, B11, B12] et de Ershov [B40] sur la théorie des modèles des corps valués henséliens, des outils modèle-théoriques ont été appliqués avec beaucoup de succès à l'étude des *corps valués*. Plus récemment, dans leurs travaux sur la théorie ACVF des corps valués algébriquement clos, Haskell, Hrushovski et Macpherson [B49, B50] ont introduit dans le contexte valué des outils provenant de la stabilité géométrique.

Les *corps aux différences* ont également été étudiés à l'aide des méthodes de la théorie des modèles géométrique, à commencer par le travail important de Chatzidakis et Hrushovski [B32] sur la théorie ACFA des corps avec automorphisme *générique*.

Dans ce chapitre, nous traitons d'une combinaison de ces deux contextes, c'est-à-dire des corps valués aux différences.

Tout ultraproduit non-principal de structures de la forme $(\mathbb{F}_p^a, Frob_p)$ est un modèle de ACFA_0, autrement dit le Frobenius non-standard est un automorphisme générique. Ceci est un résultat profond de Hrushovski [B63] dont la preuve a requis des *estimations de Lang-Weil tordues*.

On peut considérer le Frobenius non-standard agissant sur un corps *valué* algébriquement clos, c'est-à-dire la théorie limite de l'automorphisme de Frobenius agissant sur un corps valué algébriquement clos de caractéristique p (lorsque p tend vers l'infini). Hrushovski [B62] a donné une axiomatisation naturelle de cette théorie limite notée VFA_0, dans le langage des corps valués aux différences. Durhan [B14] a obtenu une axiomatisation alternative, ainsi qu'un principe d'Ax-Kochen-Ershov pour une certaine classe de corps valués aux différences.

La théorie VFA_0 est intéressante d'un point de vue algébrique. Le corps résiduel, avec l'automorphisme induit $\overline{\sigma}$, est un modèle de ACFA_0, par le résultat de Hrushovski mentionné ci-dessus. L'automorphisme σ_Γ induit sur le groupe des valeurs Γ est *ω-croissant*, c'est-à-dire qu'il vérifie $\sigma_\Gamma(\gamma) > n\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{>0}$ et $n \geq 1$; les corps valués aux différences satisfaisant à cette propriétés seront appelés *contractants*. Le groupe des valeurs Γ hérite ainsi de la structure d'un $\mathbb{Z}[\sigma]$-module ordonné divisible, où $\sigma \gg 1$ est une indéterminée. Il suffit d'ajouter une propriété de *σ-hensélianité* pour obtenir une axiomatisation de VFA_0.

De plus, les corps valués aux différences jouent un rôle dans l'étude des corps aux différences (non-valués), via des *spécialisations transformelles* (voir [B63]). Une meilleure compréhension des corps valués aux différences pourrait éclairer certaines parties de la preuve par Hrushovski des estimations de Lang-Weil tordues.

Nous avons mentionné au début de ce mémoire que, depuis une vingtaine d'années, les méthodes de la stabilité géométrique ont été étendues à des contextes instables, en particulier dans deux directions bien distinctes : d'abord aux théories *simples* ([B97]), et plus récemment aux théories NIP ([B7, B95]). Il est caractéristique dans ces développements que les motivations proviennent aussi bien de considérations modèle-théoriques pures que de l'étude de structures algébriques particulières importantes : ACFA comme prototype d'une théorie simple et instable, et ACVF comme exemple typique d'une théorie NIP et instable.

Notons que VFA_0 n'est ni simple (puisque le groupe des valeurs a la propriété de l'ordre stricte) ni NIP (puisque le corps résiduel a la propriété d'indépendance). Les généralisations de la stabilité géométrique mentionnées ci-dessus ne s'appliquent donc pas à VFA_0.

Or, il s'avère que Shelah a défini, dans les années '80, une autre classe de théories, appelées théories NTP_2, c'est-à-dire des théories sans la propriété de l'arbre de seconde espèce [B92]. Cette classe comprend à la fois les théories simples et les théories NIP, et elle contient de nouveaux exemples (tout ultraproduit de corps p-adiques est NTP_2, par un résultat de Chernikov [B36]).

Récemment, la classe des théories NTP_2 a été l'objet d'un grand intérêt, largement motivé par la question de Pillay sur l'égalité de la déviation et de la division au-dessus des modèles d'une théorie NIP. Chernikov et Kaplan [B37] ont répondu de manière affirmative, et même dans le contexte plus général des théories NTP_2. Leur solution montre que la NTP_2 fournit le bon cadre pour ce genre de question. L'étude de la non-déviation dans les théories NTP_2 a été prolongée par Chernikov [B36] et Ben Yaacov et Chernikov [B26].

Nos contributions et le plan du chapitre

Nous exposons dans ce chapitre les résultats de notre article [A4]. Le plan est le suivant. Nous commençons par une section de préliminaires qui traite de la théorie des modèles des corps valués et des corps valués aux différences. Dans la section 2.3, nous présentons quelques nouveaux résultats sur les tableaux indiscernables, qui fournissent une méthode nouvelle et efficace pour montrer qu'une théorie concrète donnée est NTP_2. La section 2.4 est consacrée à l'étude de la NTP_2 dans certains corps valués aux différences. Nous y montrons des résultats de préservation de la NTP_2. Nous terminons avec une section sur des perspectives de recherche (Section 2.5). Nous y mentionnons pour l'essentiel des questions liées à la théorie VFA_0.

Dans [A4] nous amorçons l'étude de la théorie des modèles géométrique des corps valués aux différences, notamment de la théorie VFA_0 du Frobenius non-standard dans le contexte valué. Nous y établissons le théorème de modération relative suivant. (Nous travaillons dans le langage de Pas à trois sortes $\mathbf{K}$,$\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$, augmenté des fonctions σ, $\overline{\sigma}$ et σ_Γ, et nous supposons que la composante angulaire vérifie $\mathrm{ac} \circ \sigma = \overline{\sigma} \circ \mathrm{ac}$.)

Théorème (2.4.1). *Soit $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ un corps* ac*-valué aux différences de caractéristique résiduelle 0. On suppose :*

— *$T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ élimine les $\mathbf{K}$-quanteurs ;*
— *le corps résiduel k (en tant que corps aux différences) est* NTP_2*, et*
— *le groupe des valeurs Γ (en tant que groupe ordonné aux différences) est* NTP_2*.*

Alors $\mathcal{K}$ est NTP_2*.*

Dans la preuve, nous combinons un résultat nouveau sur l'extension de tableaux indiscernables par des paramètres provenant de sortes NTP_2 (proposition 2.3.6) avec le système de va-et-vient que l'on déduit de l'élimination des quanteurs du corps. Nous réduisons ainsi l'énoncé à une situation où l'on n'ait à gérer que des extensions immédiates. Ces dernières sont alors contrôlées, en un certain sens, par des formules NIP.

Comme applications de ce théorème, nous obtenons des exemples algébriques intéressants et nouveaux de théories NTP_2 :

— Toute complétion de VFA_0 est NTP_2. Plus généralement, tout corps valué aux différences, contractant σ-hensélien et de caractéristique 0, est NTP_2 si le groupe des valeurs (avec l'automorphisme induit) ainsi que le corps résiduel (avec l'automorphisme induit) sont NTP_2. (Il y a un principe d'Ax-Kochen-Ershov dans ce contexte [B14].)
— Nous montrons un résultat similaire dans le contexte isométrique, où il y a également un principe d'Ax-Kochen-Ershov [B90, B25, B15]. Une instance de ce résultat est donné par l'automorphisme de *Witt-Frobenius* non-standard.

Des résultats de préservation similaires sont connus pour les corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0, où l'on les déduit du principe d'Ax-Kochen-Ershov classique : Delon [B39] l'a montré pour NIP, Shelah [B94] pour *fortement dépendant* (un renforcement de NIP) et Chernikov [B36] pour NTP_2 (et la finitude du *fardeau*).

Nous exhibons avec la théorie VFA_0 une théorie NTP_2 qui est suffisamment riche pour qu'elle puisse servir de prototype des théories NTP_2. De plus, notre résultat de préservation confirme que la NTP_2 est une notion robuste et pertinente, également en ce qui concerne des théories de nature algébrique.

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons le matériel sur les corps valués aux différences et leur théorie des modèles dont nous aurons besoin. Nous donnons plus de détails dans le cas contractant, en particulier à propos de la théorie VFA_0 qui a motivé nos travaux. Nous commençons par le rappel de quelques résultats importants en théorie des modèles des corps valués.

2.2.1 Théorie des modèles des corps valués

Notations et conventions

Rappelons qu'un *corps valué* est donné par une application surjective $\mathrm{val} : K \to \Gamma_\infty$, où K est un corps et $\Gamma_\infty = \Gamma \dot{\cup} \{\infty\}$, avec Γ un groupe abélien ordonné et ∞ un élément distingué, satisfaisant

— $\mathrm{val}(x) = \infty \iff x = 0$;
— $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$;
— $\mathrm{val}(x + y) \geq \min\{\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)\}$.

Ici, l'ordre sur Γ est étendu en un ordre total sur Γ_∞, avec ∞ comme élément maximal, et l'addition est étendue de sorte que ∞ devienne un élément absorbant. La plupart du temps, nous ne ferons pas de distinction entre Γ et Γ_∞ et supprimerons ∞ dans les notations.

L'*anneau de valuation* est donné par $\mathcal{O} = \{x \in K \mid \mathrm{val}(x) \geq 0\}$. Il s'agit d'un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid \mathrm{val}(x) > 0\}$. On note $\mathrm{res} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{m} =: k$ l'application canonique, et k est appelé le *corps résiduel* de K. Nous écrivons parfois Γ_K ou k_K pour souligner qu'il s'agit du groupe des valeurs ou du corps résiduel du corps valué K. Une extension de corps valués $K \subseteq L$ induit des extensions $k_K \subseteq k_L$ et $\Gamma_K \subseteq \Gamma_L$.

Il existe plusieurs choix de langages pour traiter les corps valués comme structures du premier ordre. On peut utiliser le langage $\mathcal{L}_{\mathrm{div}} = \mathcal{L}_{Rings} \cup \{\mathrm{div}\}$, où div est un symbole de relation binaire interprété par $x \,\mathrm{div}\, y$ ssi $\mathrm{val}(x) \leq \mathrm{val}(y)$.

Il est souvent préférable de travailler dans un langage à trois sortes. Soit $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}}$ le langage qui consiste en

— le $\mathcal{L}_{\mathbf{K}} = \{0, 1, +, -, \times\}$ sur la sorte du corps valué notée $\mathbf{K}$;
— une autre copie du langage des anneaux $\mathcal{L}_{\mathbf{k}} = \{0, 1, +, -, \times\}$ sur la sorte du corps résiduel notée $\mathbf{k}$;
— le langage des groupes ordonnés (avec un élément supplémentaire pour l'infini) $\{0, +, -, <, \infty\}$ sur la sorte du groupe des valeurs notée $\mathbf{\Gamma}$, et
— les fonctions $\mathrm{val} : \mathbf{K} \to \mathbf{\Gamma}$ et $\mathrm{Res} : \mathbf{K}^2 \to \mathbf{k}$ entre les sortes, où Res est la fonction qui envoie (x, y) sur $\mathrm{res}\left(\frac{x}{y}\right)$ si $\infty \neq \mathrm{val}(y) \leq \mathrm{val}(x)$, et qui vaut 0 sinon.

Corps valués algébriquement clos

Soit ACVF la théorie des corps non-trivialement valués algébriquement clos. On a le résultat classique suivant, dû essentiellement à Robinson (voir par exemple [B49]).

Fait 2.2.1. *1. Dans le langage* $\mathcal{L}_{\text{div}}$*,* ACVF *est la modèle-complétion de la théorie des corps valués. Les complétions de* ACVF *sont données par* $\text{ACVF}_{p,q}$*, où* p *désigne la caractéristique du corps valué et* q *la caractéristique du corps résiduel.*

2. On a le même résultat pour ACVF *dans le langage à trois sortes* $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}}$*. En particulier, la structure induite sur* $\mathbf{k}$ *est celle d'un pur corps algébriquement clos, et la structure induite sur* $\mathbf{\Gamma}$ *est celle d'un pur groupe abélien ordonné (avec une constante pour* $\text{val}(p)$ *en caractéristique mixte* $(0,p)$*).*

Il s'ensuit que les corps valués algébriquement clos sont des structures NIP.

Dans l'introduction, nous avons mentionné les travaux récents de Haskell, Hrushovski et Macpherson sur la théorie des modèles géométrique de ACVF ([B49, B50]). Nous en donnons ici le résultat important de classification des imaginaires de [B49] ; nous y reviendrons seulement dans la section sur les perspectives de recherche (Section 2.5).

Soit K un corps valué. Un *réseau* dans K^n est un $\mathcal{O}$-sous-module $s \subseteq K^n$ qui est libre de rang n. L'ensemble des réseaux est en bijection naturelle avec $\text{GL}_\text{n}(K)/\text{GL}_\text{n}(\mathcal{O})$. C'est donc un ensemble interprétable dans ACVF ; la sorte imaginaire correspondante est notée S_n.

Pour $s \in \text{S}_\text{n}$, $\text{red}(s) := s/\mathfrak{m}s$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n, et $\text{T}_\text{n} := \dot{\bigcup}_{s\in\text{S}_\text{n}}\text{red}(s)$ est également une sorte imaginaire. On appelle $\mathcal{G} := \{\mathbf{K}\} \cup \{\text{S}_\text{n} \mid n \geq 1\} \cup \{\text{T}_\text{n} \mid n \geq 1\}$ l'ensemble des *sortes géométriques.*

Fait 2.2.2 ([B49])**.** *Toute complétion de* ACVF*, considérée dans les sortes géométriques* $\mathcal{G}$*, élimine les imaginaires.*

Il est aussi montré dans [B49] que ce résultat est optimal en un certain sens.

Corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0

Nous appelons *corps* ac*-valué* tout corps valué $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ muni d'une application de *composante angulaire* ac : $K \to k$ satisfaisant aux propriétés suivantes :
— $\text{ac}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
— $\text{ac}\restriction_{K^\times}: K^\times \to k^\times$ est un homomorphisme de groupe ;
— pour tout $x \in K$ avec $\text{val}(x) = 0$, on a $\text{ac}(x) = \text{res}(x)$.

On considère les corps ac-valués dans le langage à trois sortes $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}} \cup \{\text{ac}\}$, appellé *langage de Pas.*

Théorème 2.2.3 (Pas [B78])**.** *La théorie des corps* ac*-valués henséliens de caractéristique résiduelle 0, considérée dans le langage de Pas, élimine les* $\mathbf{K}$*-quanteurs.*

Notons que le fameux *Principe d'Ax-Kochen-Ershov* est une conséquence du résultat de Pas : si $\mathcal{K}_1 = (K_1, k_1, \Gamma_1)$ et $\mathcal{K}_2 = (K_2, k_2, \Gamma_2)$ sont des corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0, alors $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$ ssi $k_1 \equiv k_2$ et $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$.

Dans les corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0, une composante angulaire n'est pas définissable. Il est donc parfois préférable de ne pas l'ajouter au langage. Si l'on veut garder l'élimination des **K**-quanteurs, une possibilité est de travailler avec la sorte auxiliaire $\mathbf{RV} = \mathbf{K}^*/1 + \mathfrak{m}$ et un langage naturel sur cette sorte (voir par exemple Flenner [B42]).

2.2.2 Corps valués aux différences

Dans cette partie nous introduisons certains concepts liés aux corps valués aux différences.

Dans ce mémoire, un *corps aux différences* sera toujours un corps K avec un automorphisme distingué σ, c'est-à-dire ce qu'on appelle parfois un corps aux différences *inversif.*

Un *groupe ordonné aux différences* est la donnée d'un groupe abélien ordonné $\langle \Gamma; 0, +, -, < \rangle$ avec un automorphisme distingué σ. On dit qu'il est ω*-croissant* si $\sigma(\gamma) > n\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{>0}$ et tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Notons que tout groupe ordonné aux différences ω-croissant $\langle \Gamma, +, <, \sigma \rangle$ est naturellement un $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$-module ordonné (en particulier sans torsion), où $\mathbb{Z}[\sigma]$ est l'anneau des polynômes dans la variable σ, avec l'ordre à l'infini, donné par $\sigma \gg 1$. Réciproquement, tout $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$-module ordonné fournit un groupe ordonné aux différences ω-croissant. Si un tel module est divisible, il correspond à un espace vectoriel ordonné sur le corps des fractions $\mathbb{Q}(\sigma)$ de $\mathbb{Z}[\sigma]$.

Un *corps valué aux différences* est la donnée d'un corps valué K avec un automorphisme de corps distingué σ vérifiant $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Notons que σ induit un automorphisme $\overline{\sigma}$ du corps résiduel, qui hérite donc d'une structure de corps aux différences. De manière similaire, σ induit un automorphisme σ_Γ du groupe des valeurs, qui devient ainsi un groupe ordonné aux différences. Nous nous intéressons principalement à deux cas extrêmes : le cas *contractant*, où le groupe des valeurs est ω-croissant, et le cas *isométrique*, où l'automorphisme induit sur le groupe des valeurs est l'identité.

Enfin, nous appelons *corps* ac*-valué aux différences* tout corps valué aux différences $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma, \sigma)$ muni d'une application de composante angulaire ac vérifiant $\mathrm{ac} \circ \sigma = \overline{\sigma} \circ \mathrm{ac}$.

2.2.3 Théorie des modèles des corps valués aux différences

Dans ce qui suit, nous exposons quelques résultats sur les corps valués aux différences σ-henséliens. Sous les bonnes hypothèses, on a l'analogue du théorème de Pas, ce qui a des conséquences modèle-théoriques fortes.

Une grande partie des résultats que nous présentons dans le cas contractant est due à Durhan ([B14, B13]). Nous renvoyons aussi à [B77, B45], ainsi qu'au manuscrit non-publié [B62] de Hrushovski, où la plupart des idées concernant le cas contractant apparaissent déjà. Hrushovski y a également étudié le Frobenius non-standard dans la catégorie des corps valués.

À la fin de cette partie, nous mentionnons brièvement le cas isométrique, qui a historiquement précédé le cas contractant [B88, B90, B25, B15].

Nous traitons les corps valués aux différences dans le langage à trois sortes $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} := \mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}} \cup \{\sigma, \overline{\sigma}, \sigma_\Gamma\}$; les corps ac-valués aux différences seront considérés dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$.

Commençons par un lemme qui donne quelques conséquences de l'élimination des **K**-quanteurs. On le montre essentiellement par inspection du langage.

Lemme 2.2.4 ([A4, Lemma 2.3])**.** *Soit T une $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$-théorie de corps* ac*-valués aux différences. On suppose que T élimine les* **K***-quanteurs.*

1. *Soit $\mathcal{K} = (K, k_K, \Gamma_K)$ un modèle de T. Alors,*
   - *(a) $k_K = \mathbf{k}(\mathcal{K})$ est stablement plongé, et la structure induite est celle d'un corps aux différences ;*
   - *(b) $\Gamma_K = \mathbf{\Gamma}(\mathcal{K})$ est stablement plongé, et la structure induite est celle d'un groupe ordonné aux différences, et*
   - *(c) $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire tout sous-ensemble définissable de $\mathbf{k}^m \times \mathbf{\Gamma}^n$ est une réunion finie de rectangles.*
2. *(Principe d'Ax-Kochen-Ershov) Soient $\mathcal{K} = (K, k_K, \Gamma_K)$ et $\mathcal{L} = (L, k_L, \Gamma_L)$ des modèles de T.*
   - *(a) On a $\mathcal{K} \equiv \mathcal{L}$ si et seulement si $k_K \equiv k_L$ (comme corps aux différences) et $\Gamma_K \equiv \Gamma_L$ (comme groupes ordonnés aux différences).*
   - *(b) Si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, alors $\mathcal{K} \preccurlyeq \mathcal{L}$ si et seulement si $k_K \preccurlyeq k_L$ et $\Gamma_K \preccurlyeq \Gamma_L$.*

Corps valués aux différences contractants σ-hensóliens

Commençons par considérer le groupe des valeurs. On note IncDODG la théorie des $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$-modules ordonnés divisibles non-triviaux, dans le langage $\mathcal{L}_{ODG} = \{0, +, -, <, \sigma\}$.

Fait 2.2.5 (cf. par exemple [B77])**.** IncDODG *est la modèle-complétion de la $\mathcal{L}_{ODG}$-théorie des groupes ordonnés aux différences ω-croissants. En particulier,* IncDODG *élimine les quanteurs et est o-minimale.*

Durhan a défini une notion de *σ-hensélianité* pour les corps valués aux différences contractants ([B14, Definition 4.5]), qui est du premier ordre et qui a toutes les propriétés raisonnables qu'on attend.

Fait 2.2.6.
1. *Si (K, k, Γ, σ) est contractant et σ-hensélien, alors $(k, \bar{\sigma})$ est* linéairement σ-clos*, c'est-à-dire si $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in k$ ne sont pas tous zéro, l'équation $1 + \alpha_0 X + \alpha_1 \sigma(X) + \cdots + \alpha_n \sigma^n(X)$ a une solution dans $(k, \bar{\sigma})$ ([B14, Lemma 4.6]).*
2. *Réciproquement, si (K, k, Γ, σ) est contractant avec $(k, \bar{\sigma})$ linéairement σ-clos de caractéristique 0 et si le corps valué sous-jacent K est maximalement complet, alors (K, k, Γ, σ) est σ-hensélien ([B14, Corollary 5.6]).*

3. *En particulier, soient (Γ, σ_Γ) un groupe aux différences ω-croissant et $(k, \bar{\sigma})$ un corps aux différences de caractéristique 0 linéairement σ-clos.*
   Le corps de Hahn $K := k((\Gamma))$, un corps valué qui est naturellement équipé de l'automorphisme σ qui envoie $\sum_\gamma a_\gamma t^\gamma$ sur $\sum_\gamma \overline{\sigma}(a_\gamma) t^{\sigma_\Gamma(\gamma)}$, est alors (contractant et) σ-hensélien.

On note T_0 la $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma}$-théorie des corps valués aux différences, contractants σ-henséliens et de caractéristique résiduelle 0 ; la théorie des corps ac-valués aux différences correspondante (dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$) est notée T_0^{ac}.

Fait 2.2.7 (Durhan [B13, Thm 4.5.2])**.** *La théorie T_0^{ac} élimine les $\mathbf{K}$-quanteurs.*

Outre les conséquences qui sont mentionnées dans le lemme 2.2.4, Durhan a montré que l'on a également un principe d'Ax-Kochen-Ershov pour les modèles de T_0 ([B13], voir aussi [A4, Fact 2.10]).

Frobenius non-standard et la théorie VFA_0

On note VFA_0 la théorie T_0 augmentée par des axiomes exprimant $(\mathbf{k}, \overline{\sigma}) \models \mathrm{ACFA}_0$ et $(\mathbf{\Gamma}, \sigma_\Gamma) \models \mathrm{IncDODG}$; la théorie $\mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$ est définie de manière similaire, en remplaçant T_0 par T_0^{ac}.

Notons que $\mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$ est une théorie consistante. En effet, tout modèle de ACFA est linéairement σ-clos. Si $(k, \overline{\sigma}) \models \mathrm{ACFA}_0$ et $(\Gamma, \sigma_\Gamma) \models \mathrm{IncDODG}$, on a donc $k((\Gamma)) \models \mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$ par le fait 2.2.6(3).

Fait 2.2.8. *La théorie $\mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$ (resp. la théorie VFA_0) est la modèle-compagne de la théorie des corps* ac*-valués (resp. corps valués) aux différences contractants de caractéristique résiduelle 0.*

Il s'agit là d'une conséquence des résultats de [B13] (voir [A4, Fact 2.12]). Avec une notion légèrement différente de σ-hensélianité, Hrushovski a obtenu le même résultat dans [B62]. Il y a également montré le fait 2.2.9 ci-dessous. L'ingrédient principal de la preuve de Hrushovski est le résultat correspondant qu'il a montré sur le Frobenius non-standard sans valuation [B63]. (Ceci est expliqué dans la thèse de Giabicani [B45], voir aussi [A4, Fact 2.13].)

Pour p un nombre premier, on choisit un modèle (K_p, k_p, Γ_p) de $\mathrm{ACVF}_{p,p}$ muni d'une composante angulaire. Soit $\mathcal{K}_p = (K_p, k_p, \Gamma_p, \varphi_p)$ la $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{K},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$-structure correspondante, où φ_p est l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$.

Fait 2.2.9 (Hrushovski)**.** *Soit φ un énoncé dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{K},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}} \vdash \varphi$ *;*
2. $\mathcal{K}_p \models \varphi$ *pour presque tout* p*.*

En particulier, pour tout ultrafiltre non-principal $\mathcal{U}$ sur l'ensemble des nombres premiers, on a $\prod_\mathcal{U} \mathcal{K}_p \models \mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$.

Corps valués aux différences isométriques σ-henséliens

Une autre classe importante de corps valués aux différences est celle des corps valués munis d'une *isométrie*, où l'on exige que l'automorphisme σ_Γ qui induit sur le groupe des valeurs Γ soit l'identité. La théorie des modèles des corps valués avec isométrie, en caractéristique résiduelle 0, est bien comprise si l'on suppose de plus qu'il y a *suffisamment de constantes*, c'est-à-dire si tout $\gamma \in \Gamma$ est de la forme $\mathrm{val}(a)$ pour un $a \in \mathrm{Fix}(\sigma)$.

Il existe dans ce contexte une bonne notion de *σ-hensélianité*, qui est du premier ordre (voir [B15, Definition 4.4]). Soit S_0^{ac} la théorie des corps ac-valués aux différences σ-henséliens de caractéristique résiduelle 0, avec σ une isométrie ayant suffisamment de constantes, dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$. Comme dans le cas contractant (voir le fait 2.2.6), si $\mathcal{K} = (K, k_K, \Gamma_K) \models S_0^{\mathrm{ac}}$, alors $(k_K, \overline{\sigma})$ est linéairement σ-clos ; réciproquement, si $(k_K, \overline{\sigma})$ est linéairement σ-clos et si le corps valué sous-jacent est maximalement complet, alors $\mathcal{K}$ est σ-hensélien. En particulier, si $(k, \overline{\sigma})$ est linéairement σ-clos et si Γ est un groupe abélien ordonné quelconque, on a $k((\Gamma)) \models S_0^{\mathrm{ac}}$.

Par des travaux de Scanlon [B88, B90], Bélair, Macintyre et Scanlon [B25], puis (dans un contexte légèrement plus général) Durhan et van den Dries [B15], on peut éliminer les $\mathbf{K}$-quanteurs dans ce contexte, et on a donc les conclusions du lemme 2.2.4.

Fait 2.2.10 ([B15]). *La théorie S_0^{ac} élimine les $\mathbf{K}$-quanteurs.*

2.3 Tableaux indiscernables et NTP$_2$

Nous rappelons dans cette section un certain nombre de résultats de base sur les théories NTP$_2$, et nous présentons quelques nouveaux lemmes de [A4] sur les tableaux indiscernables. Cela fournira des outils efficaces pour montrer que certaines structures concrètes sont NTP$_2$. Notamment, le Lemme d'extension de tableaux (proposition 2.3.6 ci-dessous) incorpore la partie essentielle de la combinatoire nécessaire pour prouver les résultats de préservation de NTP$_2$ dans la classe des corps valués aux différences (cf. Section 2.4).

Un mot à propos des notations. Il y aura beaucoup de suites (d'uplets) et de suites de suites dans cette section. Pour alléger les notations, nous ne distinguons pas les singletons et les uplets (finis ou infinis). Ainsi, a, b etc. désignent des uplets (finis ou infinis), et $\bar{a}, \bar{b}$ etc. désignent des suites infinies (d'uplets). Nous utilisons $a \equiv_B a'$ comme abbréviation pour $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$.

Rappelons que si κ est un cardinal infini et B un ensemble de paramètres, une suite $(c_i)_{i\in\kappa}$ est dite *B-indiscernable* si, pour tout n et toutes suites croissantes $i_1 < \cdots < i_n$ et $j_1 < \cdots j_n$ dans κ, on a $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \equiv_B (c_{j_1}, \ldots, c_{j_n})$. On dit *indiscernable* pour $\emptyset$-indiscernable. Un ensemble de formules Φ est dit *k-inconsistant* si toute partie Φ_0 de Φ à k éléments est inconsistante.

Définition 2.3.1. On travaille dans une théorie complète T. On dit qu'une formule $\varphi(x, y)$ a la TP$_2$ (*propriété de l'arbre de seconde espèce*) s'il existe $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ et $k \in \omega$ tels que :

1. $\{\varphi(x, a_{ij})\}_{j\in\omega}$ est k-inconsistant pour tout $i \in \omega$.
2. $\{\varphi(x, a_{if(i)})\}_{i\in\omega}$ est consistant pout toute fonction $f : \omega \to \omega$.

On dit que T est NTP_2 si aucune formule n'a la TP_2.

Si T est une théorie simple ou NIP, alors T est NTP_2 (voir par exemple [B36, Section 2]). Pour vérifier qu'une théorie donnée est NTP_2, le résultat suivant est très utile.

Fait 2.3.2 (Chernikov [B36])**.** *Si T n'est pas NTP_2, alors il existe une formule $\varphi(x, y)$ avec $|x| = 1$ ayant la TP_2.*

Définition 2.3.3. Soit κ un cardinal infini. On dit que $(a_{ij})_{i,j\in\kappa}$ est un *tableau fortement indiscernable* si

— $\bar{a}_i = (a_{ij})_{j\in\kappa}$ est indiscernable sur $\bar{a}_{\neq i}$ pour tout i, et
— $(\bar{a}_i)_{i\in\kappa}$ est une suite indiscernable (de suites).

Si uniquement la première condition est satisfaite, on dit que les suites $(\bar{a}_i)_{i\in\kappa}$ sont *mutuellement indiscernables*.

Lemme 2.3.4 ([A4, Lemme 3.9])**.** *Soit T une théorie et $\varphi(x, y)$ une formule. Alors $\varphi(x, y)$ a la TP_2 si et seulement s'il existe un tableau fortement indiscernable $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ qui en témoigne (comme dans la définition 2.3.1), et une réalisation $c \models \{\varphi(x, a_{i0})\}_{i\in\omega}$ telle que la suite des lignes $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ soit c-indiscernable.*

Grâce à ce résultat, savoir manipuler les tableaux fortement indiscernables est utile dans l'étude de la NTP_2. Le lemme permet de réduire certaines questions à des considérations très 'locales'.

Nous mentionnons maintenant deux résultats concernent l'extension de tableaux fortement indiscernables. Le premier est facile ; quant au deuxième, sa preuve demande des arguments combinatoires plus poussés.

Lemme 2.3.5 ([A4, Lemme 3.6])**.** *Soit $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ un tableau fortement indiscernable tel que $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ soit c-indiscernable, et soit b un uplet fixé. Alors il existe des b_{ij} tels que*

— *$(b_{ij}a_{ij})_{i,j\in\omega}$ est un tableau fortement indiscernable,*
— *$ba_{00} \equiv b_{ij}a_{ij}$ pour tout i, j, et*
— *$(\bar{b}_i\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est c-indiscernable.*

Proposition 2.3.6 (Lemme d'extension de tableaux [A4, Lemma 3.8])**.** *Soit D un ensemble $\emptyset$-définissable stablement plongé tel que D_{ind} soit NTP_2. On suppose que :*

— *$(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ est c-indiscernable, et*
— *$(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ est un tableau fortement indiscernable.*

Soit $b \subseteq D$ un uplet (petit). Alors il existe $(a^*_{ij})_{i,j\in\omega}$ et $(b^*_{ij})_{i,j\in\omega}$ tels que :

1. *$(\bar{b}^*_i\bar{a}^*_i)_{i\in\omega}$ est c-indiscernable ;*
2. *$(\bar{b}^*_i\bar{a}^*_i)_{i\in\omega}$ est mutuellement indiscernable ;*
3. *$\bar{a}^*_i \equiv_{a_{i0}} \bar{a}_i$ pour tout $i \in \omega$ (donc en particulierr $a^*_{i0} = a_{i0}$), et*

4. $cba_{00} \equiv cb^*_{00}a^*_{00}$.

En particulier $\left(b^*_{ij}a^*_{ij}\right)_{i,j\in\omega}$ *est un tableau fortement indiscernable.*

2.4 Corps valués aux différences et NTP_2

Nous présentons d'abord un théorème abstrait de préservation de NTP_2 dans les corps valués aux différences. Nous appliquons ensuite ce résultat aux corps valués aux différences σ-henséliens.

2.4.1 Un résultat de préservation général

Nous considérons ici des corps ac-valués aux différences de caractéristique résiduelle 0, dans le langage à trois sortes $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma},\sigma} \cup \{\mathrm{ac}\}$. Pour les notations et conventions, nous renvoyons aux préliminaires (Section 2.2).

Théorème 2.4.1 ([A4, Theorem 4.1])**.** *Soit* $\mathcal{K} = (K, k, \Gamma)$ *un corps* ac*-valué aux différences de caractéristique résiduelle 0. On suppose que :*

- $T = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ *élimine les* $\mathbf{K}$*-quanteurs ;*
- *le corps résiduel* k *(en tant que corps aux différences) est* NTP_2*, et*
- *le groupe des valeurs* Γ *(en tant que groupe ordonné aux différences) est* NTP_2*.*

Alors $\mathcal{K}$ *est* NTP_2*.*

Nous allons présenter une esquisse de la preuve.

S'il existe une formule $\varphi(x, y)$ ayant la TP_2, on utilise le fait 2.3.2 pour en trouver une où x est un singleton (de la sorte du corps $\mathbf{K}$). Par le lemme 2.3.4, on trouve alors un tableau fortement indiscernable $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ qui en témoigne, et une réalisation $c \models \{\varphi(x, a_{i0})\}_{i\in\omega}$ telle que la suite des lignes $(\bar{a}_i)_{i\in\omega}$ soit c-indiscernable.

Par le lemme 2.2.4, les hypothèses du Lemme d'extension de tableaux (proposition 2.3.6) sont satisfaites, aussi bien pour $D = \mathbf{\Gamma}$ que pour $D = \mathbf{k}$. Ainsi, en alternant une infinité de fois des applications du Lemme d'extension de tableaux et des applications du lemme 2.3.5, on peut si besoin est 'gonfler' le tableau $(a_{ij})_{i,j\in\omega}$ — tout en gardant les propriétés initiales — et donc supposer que a_{00} énumère un corps ac-valué $K = (K, k_K, \Gamma_K)$ et que $L = K\langle c\rangle$ est une extension immédiate de K. Ici, $K\langle c\rangle$ désigne le corps aux différences engendré par c au-dessus de K.

Comme T élimine les $\mathbf{K}$-quanteurs, il suit que $\mathrm{tp}(c/a_{00})$ est déterminé par $\mathrm{qftp}(c/a_{00})$. On montre que toute formule sans quanteurs est NIP (donc en particulier NTP_2), ce qui mène à une contradiction.

La preuve que nous venons d'esquisser est suffisamment robuste pour rester valide si l'on ajoute de la structure supplémentaire au groupe des valeurs et/ou au corps résiduel :

Remarque 2.4.2 ([A4, Remark 4.3]). *En gardant les notations et les hypothèses du théorème 2.4.1, supposons de plus que $T'_r \supseteq \mathrm{Th}(k, \overline{\sigma})$ et $T'_v \supseteq \mathrm{Th}(\Gamma, \sigma_\Gamma)$ sont des expansions qui sont toutes les deux* NTP_2.

Alors la théorie $T' := T \cup T'_r \cup T'_v$ élimine les $\mathbf{K}$*-quanteurs et est* NTP_2.

2.4.2 Préservation dans les corps valués σ-henséliens

Dans cette partie, nous traitons de trois contextes dans lesquels le théorème 2.4.1 s'applique.

Le cas contractant

Nous fixons une complétion T de la théorie T_0^{ac} que nous avons introduite dans la partie 2.2.3, c'est-à-dire que T est de la forme $T_0^{\mathrm{ac}} \cup T_r \cup T_v$, avec T_r une théorie complète de corps aux différences de caractéristique 0 et linéairement σ-clos, et T_v une théorie complète de $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$-modules ordonnés.

En combinant le théorème 2.4.1 avec le fait 2.2.7, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.4.3 ([A4, Theorem 4.4]). *On suppose que T_r et T_v sont des théories* NTP_2. *Alors T est* NTP_2.

Corollaire 2.4.4 ([A4, Corollary 4.5]). *Toute complétion de* $\mathrm{VFA}_0^{\mathrm{ac}}$ *est* NTP_2.

En effet, toute complétion de ACFA_0 est simple et en particulier NTP_2, et la théorie IncDODG est o-minimale, donc NIP et en particulier NTP_2.

Étant données les hypothèses du théorème 2.4.3, il serait intéressant de savoir quels $\mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$-modules ordonnés sont NTP_2 ou même NIP. On peut formuler ce problème dans un contexte plus général.

Soit R un anneau ordonné. Rapppelons qu'un *R-module ordonné* est un groupe abélien ordonné $\langle M, 0, +, < \rangle$ avec une action de R par endomorphismes qui est compatible avec les ordres sur R et M, c'est-à-dire telle que $r \cdot m > 0$ pour tout $r \in R_{>0}$ et tout $m \in M_{>0}$.

On considère les R-modules ordonnés dans le langage $\{0, +, <\} \cup \{\lambda_r \mid r \in R\}$, où λ_r correspond à la multiplication scalaire par r.

Question 2.4.5.
1. Est-ce que tous les R-modules ordonnés sont NIP (pour tout anneau ordonné R) ?
2. Est-ce que ceci est au moins le cas pour $R = \mathbb{Z}[\sigma, \sigma^{-1}]$?

Notons que tout module est stable (voir par exemple [B56]), et que tout groupe abélien ordonné est NIP, par un résultat de Gurevich et Schmidt [B47]. Une réponse positive même à la première question paraît donc possible. Il semble que la réponse à cette question ne soit pas connue.

Dans l'exemple suivant, nous considérons quelques cas faciles.

Exemple 2.4.6 ([A4, Corollary 5.11]). Soit R un anneau avec $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}] \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}(\sigma)$. Alors R est NIP en tant que un module ordonné sur lui-même. En particulier, le groupe ordonné aux différences $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$ est NIP.

Le cas isométrique

Rappelons que S_0^{ac} désigne la théorie des corps ac-valués aux différences σ-henséliens de caractéristique résiduelle 0, avec σ une isométrie ayant suffisamment de constantes (cf. la partie 2.2.3). Étant donné que S_0^{ac} élimine les **K**-quanteurs (fait 2.2.10), on peut appliquer le théorème 2.4.1 dans ce contexte. Comme tout groupe abélien ordonné est NIP, aucune condition sur le groupe des valeurs n'est requise.

Théorème 2.4.7 ([A4, Theorem 4.6])**.** *Soit $\mathcal{K} = (K, k_K, \Gamma_K) \models S_0^{\mathrm{ac}}$. Alors $\mathcal{K}$ est* NTP$_2$ *ssi k_K (en tant que corps aux différences) est* NTP$_2$*.*

Exemple 2.4.8. Dans le cas isométrique, une modèle-compagne existe [B25]. Pour l'obtenir, il suffit d'ajouter à S_0^{ac} des axiomes garantissant que $(k_K, \overline{\sigma}) \models$ ACFA$_0$ et que Γ_K est un groupe abélien divisible (non-trivial).

Toute complétion de cette modèle-compagne est alors NTP$_2$.

Discutons un deuxième exemple, de nature plus arithmétique. Pour p un nombre premier, on considère $W(\mathbb{F}_p^{alg})$, le corps des fractions de l'anneau de Witt sur $\mathbb{F}_p^{alg}$, avec sa valuation naturelle. Il existe une isométrie naturelle sur le corps valué $W(\mathbb{F}_p^{alg})$, l'automorphisme de *Witt-Frobenius*, noté $\widetilde{Frob}_p$, qui envoie $x = \sum_n a_n p^n \in W(\mathbb{F}_p^{alg})$ sur $\sum_n a_n^p p^n$.

Si on pose $\mathrm{ac}(x) := a_{\mathrm{val}(x)}$, on obtient un corps ac-valué aux différences $\mathcal{W}_p = (W(\mathbb{F}_p^{alg}), \mathbb{F}_p^{alg}, \mathbb{Z}, \widetilde{Frob}_p)$.

Nous référons à [B25, Section 12] pour l'exemple suivant.

Exemple 2.4.9 (Automorphisme de Witt-Frobenius non-standard)**.** Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers. Alors $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{W}_p \models S_0^{ac}$. De plus, $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{W}_p \equiv \prod_{\mathcal{U}} (\mathbb{F}_p^{alg}((t)), \sigma_p)$, où σ_p est l'isométrie donnée par $\sum a_n t^n \mapsto \sum a_n^p t^n$.

Remarquons qu'il existe alors $(k, \overline{\sigma}) \models$ ACFA$_0$ tel que $(k((t)), \sigma) \equiv \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{W}_p$. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.10 ([A4])**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers. Alors $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{W}_p$ est* NTP$_2$*.*

Le cas des corps valués henséliens

Finalement, le théorème 2.4.1 s'applique dans le cadre des corps valués (sans automorphisme), par le Théorème de Pas (théorème 2.2.3). En effet, tout corps ac-valué peut être considéré comme un corps ac-valué aux différences avec $\sigma =$ id.

Corollaire 2.4.11 ([A4, Corollary 4.7])**.** *Soit $\mathcal{K} = (K, \Gamma_K, k_K)$ un corps* ac-*valué hensélien de caractéristique résiduelle 0, dans le langage de Pas $\mathcal{L}_{\mathbf{k},\mathbf{\Gamma}} \cup$* {ac}*. On suppose que la théorie du corps résiduel k_K est* NTP$_2$*. Alors la théorie de $\mathcal{K}$ est* NTP$_2$*.*

Ce résultat avait été montré auparavant par Chernikov [B36], avec une preuve moins conceptuelle et plus directe. Sa preuve donne également une borne sur le *fardeau* du corps valué en fonction des fardeaux du corps résiduel et du groupe des valeurs. En revanche, notre preuve du théorème 2.4.1 semble trop 'infinitaire' pour pouvoir donner un contrôle sur le fardeau.

2.5 Perspectives de recherches futures

Dans cette dernière section, nous mentionnons quelques perspectives de recherche, principalement autour de la théorie VFA_0.

Propriétés de théorie des modèles pure dans VFA_0

Nous commençons par quelques questions de théorie des modèles pure qui se posent à propos de VFA_0.

Raffinements de la NTP_2

Nous avons montré que VFA_0 est NTP_2. Il existe des raffinements intéressants de NTP_2, et VFA_0 satisfait sans doute des propriétés abstraites plus fortes que la NTP_2. On peut par exemple demander s'il s'agit d'une théorie *résiliente*, un renforcement possible de NTP_2 introduit par Ben Yaacov et Chernikov dans [B26] (voir aussi [A4, Section 5]).

Une propriété qui semble plus importante d'un point de vue structurel est celle d'une théorie *forte* qui a été introduite par Adler [B6] (voir aussi [B36]), une version 'globale' de la NTP_2. Une théorie est dite forte s'il n'existe pas d'objets $(\varphi_i(x, y_i), \bar{a}_i, k_i)$ avec $\bar{a}_i = (a_{ij})_{j\in\omega}$ et $k_i \in \omega$ tels que

— $\{\varphi_i(x, a_{ij})\}_{j\in\omega}$ est k_i-inconsistant pour tout $i \in \omega$, et
— $\{\varphi_i(x, a_{if(i)})\}_{i\in\omega}$ est consistant pour toute fonction $f : \omega \to \omega$.

Question 2.5.1. Est-ce que VFA_0 est une théorie forte ?

Non-déviation dans VFA_0

Une meilleure compréhension de la non-déviation dans VFA_0 serait souhaitable, au mieux en des termes algébriques concrets . Donnons quelques questions que l'on peut poser à plus court terme (voir [A4]). Elles ont un sens dans la sorte réelle, dans M^{eq}, et surtout dans les sortes géométriques $\mathcal{G}$.

Question 2.5.2.
1. Est-que VFA_0 est une théorie *extensible*, c'est-à-dire est-il vrai que pour tout ensemble (petit) de paramètres A, tout type $p(x) \in S(A)$ a une extension globale qui ne dévie pas sur A ? (Notons qu'il suffit de vérifier cette propriété pour les 1-types.)
2. Est-ce que VFA_0 élimine le quanteur $\exists^\infty$?

3. Est-ce que VFA_0 est une théorie *basse*, c'est-à-dire est-il vrai que, pour toute formule $\varphi(x, y)$, il existe $k \in \omega$ tel que, pour toute suite indiscernable $(a_i)_{i\in\omega}$, l'ensemble $\{\varphi(x, a_i)\}_{i\in\omega}$ est consistant si et seulement s'il est k-consistant ?

Domination simple

Dans les travaux de Haskell, Hrushovski et Macpherson [B49, B50], un rôle fomndamental est joué par les types *stablement dominés*, qui se comportent comme les types dans une théorie stable. Ils sont contrôlés par le corps résiduel, en un certain sens. L'exemple typique est le générique d'une boule fermée.

Il serait hautement souhaitable d'avoir une théorie analogue pour VFA_0. Or, cette fois la théorie du corps résiduel (aux différences) est simple et instable. Il est tentant d'essayer de développer une notion de 'domination simple', au moins dans la théorie VFA_0. Toute avancée dans ce sens, aussi partielle ou ad hoc qu'elle doive être, serait intéressante. En remplaçant les types stables par les types simples, on est confronté à des problèmes techniques considérables. Notons que quelques éléments de la théorie des types simples dans les théories NTP_2 ont été développés par Chernikov dans [B36].

Mentionnons une question qui illustre le type de problèmes qui se posent :

Question 2.5.3. Est-ce que la réunion de deux ensembles stablement plongés dans VFA_0 est stablement plongée ? Est-ce que ceci est au moins vrai pour des ensembles simples stablement plongés ?

Une autre difficulté est que l'on ne sait pour l'instant pas classifier les imaginaires dans VFA_0 (voir le point suivant), et l'on est donc contraint à des démarches ad hoc. Il est par exemple raisonnable de travailler dans les sortes géométrique $\mathcal{G}$ de [B49] présentées dans la partie 2.2.1, et dans lesquelles ACVF élimine les imaginaires (fait 2.2.2).

Imaginaires dans VFA_0

Nous discutons maintenant le problème de la classification des imaginaires dans VFA_0. Il s'agit là d'une question sur laquelle je travaille actuellement. Une telle classification est un objectif de recherche à long terme important dans l'étude modèle-théorique de VFA_0.

Afin de comprendre pleinement une théorie, surtout du point de vue de la théorie des modèles géométrique, une classification de ses imaginaires est indispensable. Ceci explique en partie pourquoi la classification des imaginaires dans ACVF par les sortes géométriques, que nous venons de rappeler ci-dessus, a autant stimulé le développement des outils géométriques dans le contexte valué ; la théorie des types stablement dominés en est une autre raison.

Question 2.5.4. Est-ce que les imaginaires de VFA_0 sont classifiés par les sortes géométriques ?

Il est concevable que cette question ait une réponse positive. Mais cela semble être un problème difficile. De plus, il convient de rester prudent. En effet, dans l'expansion des corps valués par des fonctions analytiques (restreintes), il y a des imaginaires qui échappent aux sortes géométriques [B51]. Il n'est pas clair si l'on doit s'attendre à des phénomènes similaires dans VFA_0.

Chatzidakis et Hrushovski ont montré que la théorie ACFA élimine les imaginaires [B32]. Ceci dû au fait que les corps algbriquement clos ont la *propriété d'unique 3-amalgamation*. Plus généralement, on a le résultat de Hrushovski [B65] suivant : si T est une théorie stable, qui élimine les imaginaires et a la propriété d'unique 3-amalgamation, alors TA élimine les imaginaires (si elle existe).

Or, $\mathrm{ACVF}_{0,0}$ n'est pas une théorie stable ; de plus, VFA_0 n'est pas la modèle-compagne des corps valués aux différences de caractéristique résiduelle 0, mais uniquement de la sous-classes donnée par les automorphismes contractants (fait 2.2.8). Le théorème évoqué de Hrushovski ne s'applique donc pas tel quel à la théorie VFA_0. Quoi qu'il en soit, motivé par ce même théorème, j'ai étudié l'amalgamation supérieure dans $\mathrm{ACVF}_{0,0}$, et je montre, dans un travail en cours, le résultat suivant :

Théorème 2.5.5 ([B55]). $\mathrm{ACVF}_{0,0}$ *a la propriété d'unique 3-amalgamation pour les types stablement dominés.*

Dans la preuve, on utilise d'abord l'un des résultats principaux de l'article [B65] de Hrushovski pour montrer que, au-dessus d'un ensemble de paramètres quelconque, la partie stable de $\mathrm{ACVF}_{0,0}$ (qui est essentiellement donnée par une collection d'espaces vectoriels de dimension finie sur le corps résiduel) a la propriété d'unique 3-amalgamation. Ensuite, à l'aide des *résolutions génériques de réseaux* de [B50], on réussit à réduire le problème à une situation que l'on sait traiter à la main, moyennant quelques résultats classiques de théorie de Galois pour les corps valués.

Au vu du théorème 2.5.5, il convient de regarder un cas particulier de la question 2.5.4. Soit donc K un modèle de VFA_0. Un ensemble définissable $X \subseteq K^n$ est dit de *dimension totale finie* si tout $a \in X(L)$ (dans une extension $L \succcurlyeq K$) est σ-algébrique sur K.

Conjecture 2.5.6. *Soit $X \subseteq K^n$ de dimension totale finie et E une relation d'équivalence sur X, avec X et E définissables sur un ensemble de paramètres $A \subseteq K$. Alors X/E admet un A-plongement dans les sortes géométriques.*

Cette conjecture est une conséquence de la conjecture suivante plus forte.

Conjecture 2.5.7. *Soit A un ensemble de paramètres algébriquement clos dans un modèle de* VFA_0*. Alors le réduit aux sortes représentants des ensembles A-définissables dans $\mathcal{G}$ et analysable dans le corps résiduel, muni de la structure induite, élimine les imaginaires.*

Notons qu'il devrait aider dans l'étude même de la question initiale (question 2.5.4) que VFA_0 soit une théorie NTP_2. Des éléments d'une théorie de domination simple seraient très utiles dans cette étude.

Amalgames de Hrushovski et corps valués

La technique d'amalgamation de Hrushovski, au cœur de la construction du mauvais corps au premier chapitre, n'a jusqu'alors jamais été utilisée dans le contexte des théories NIP instables.

Un étudiant en thèse, sous la direction de Françoise Delon et de moi-même, travaille actuellement sur la construction d'un *bi-corps valué*, plus précisément d'un ensemble portant deux structures de corps valué, algébriquement clos de caractéristique résiduelle 0, ayant le même groupe additif valué et tel que les deux multiplications soient aussi indépendantes que possible.

Les extensions *séparées* de corps valués au sens de Baur [B21] jouent là un rôle fondamental. Quand on se restreint aux extensions *purement résiduelles*, le type du grand corps sur le petit corps est alors stablement dominé au sens de ACVF, et la partie essentielle de l'amalgamation peut se faire au niveau du corps résiduel.

Notons que le prototype d'une extension séparée *purement résiduelle* est donnée par une extension $k((\Gamma)) \subseteq l((\Gamma))$ de corps de Hahn avec même groupe des valeurs.

Groupes et corps interprétables dans VFA_0

La compréhension des groupes et des corps interprétables est une partie constituante de la théorie des modèles géométrique. Similairement à ce que nous avons dit à propos de la domination simple, on peut imaginer un développement parallèle de l'étude des groupes dans le contexte abstrait des théories NTP_2 et dans l'exemple particulier de la théorie VFA_0.

Il est important d'explorer les conditions de chaîne et les théorèmes de structure possibles pour les groupes (et corps) NTP_2, en analogie avec le contexte simple et NIP. Les résultats de Chernikov, Kaplan et Simon [B38] sont un début. Il serait intéressant de clarifier le rôle que peut jouer le *théorème d'indépendance* de Ben Yaacov et Chernikov [B26] dans l'étude des groupes NTP_2, en l'absence de symétrie de la non-déviation.

Hrushovski a entrepris une étude systématique des groupes interprétables dans ACVF [B64]. La situation y est déjà très complexe, et il est donc difficile d'imaginer comment on pourrait classifier les groupes ou même simplement les corps interprétables dans VFA_0. En revanche, on peut espérer pouvoir décrire plus explicitement ceux des groupes interprétables qui sont analysables dans le corps résiduel.

Autres directions de recherche

Voici quelques autres directions de recherche qui méritent d'être explorées.

Corps valués aux diférences de caractéristique positive

Il serait intéressant de comprendre, dans le contexte valué, le Frobenius non-standard en caractéristique positive, c'est-à-dire les ultraproduits non-principaux des structures de la forme $\mathcal{K}_n = (K, k_K, \Gamma_K, x \mapsto x^{p^n})$, pour n variant, où $(K, k_K, \Gamma_K) \models \mathrm{ACVF}_{p,p}$.

Avant de déterminer la place de ces structures dans la hiérarchie de classification de Shelah, il faudrait, au préalable, trouver une bonne notion de σ-hensélianité dans ce contexte, ainsi qu'une expansion raisonnable du langage dans lequel on aurait l'élimination des quanteurs.

Systèmes dynamiques sur les espaces de Berkovich

La théorie des modèles géométrique de ACFA a été utilisée avec beaucoup de succès dans l'analyse des systèmes dynamiques algébriques, par exemple pour étudier des questions de descente [B33, B34] ou déterminer les sous-variétés invariantes [B76].

On peut imaginer que les outils de la théorie des modèles géométrique (dans VFA_0) pourront servir à une étude modèle-théorique des systèmes dynamiques (algébriques) sur les espaces de Berkovich. Hrushovski et Loeser [B66] ont construit en effet un avatar modèle-théorique de l'analytifiée (au sens de Berkovich) V^{an} d'une variété algébrique V (définie sur un corps valué) ; leur construction utilise les types stablement dominés dans ACVF.

Avant de pouvoir avancer dans cette direction, la compréhension modèle-théorique de VFA_0 devra être approfondie (voir les points évoqués ci-dessus).

Bibliographie

Travaux présentés

[A1] Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martin Pizarro et Frank O. Wagner : Die böse Farbe. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(3):415–443, 2009. Traduction anglaise disponible à `http://www.logique.jussieu.fr/~hils/`.

[A2] Martin Bays, Misha Gavrilovich et Martin Hils : Some definability results in abstract Kummer theory. *Int. Math. Res. Notices*, Avril 2013.

[A3] Juan Diego Caycedo et Martin Hils : Bad fields with torsion. Prépublication, arXiv :1307.5408v1, 2013.

[A4] Artem Chernikov et Martin Hils : Valued difference fields and NTP_2. À paraître dans Israel J. Math., arXiv :1208.1341v3, 2013.

[A5] Martin Hils : Generic automorphisms and green fields. *J. London Math. Soc. (2)*, 85(2):223–244, 2012.

Bibliographie générale

[B6] Hans Adler : Strong theories, burden, and weight. Prépublication, http ://www.logic.univie.ac.at/∼adler/docs/strong.pdf, 2007.

[B7] Hans Adler : An introduction to theories without the independence property. À paraître dans Arch. Math. Logic, 2008.

[B8] Tuna Altinel, Alexandre V. Borovik et Gregory Cherlin : *Simple groups of finite Morley rank*, volume 145 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[B9] James Ax : On Schanuel's conjectures. *Ann. of Math. (2)*, 93:252–268, 1971.

[B10] James Ax et Simon Kochen : Diophantine problems over local fields. I. *Amer. J. Math.*, 87:605–630, 1965.

[B11] James Ax et Simon Kochen : Diophantine problems over local fields. II. A complete set of axioms for p-adic number theory. *Amer. J. Math.*, 87:631–648, 1965.

[B12] James Ax et Simon Kochen : Diophantine problems over local fields. III. Decidable fields. *Ann. of Math. (2)*, 83:437–456, 1966.

[B13] Salih Azgin : *Model theory of valued difference fields*. Thèse de doctorat, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2007.

[B14] Salih Azgin : Valued fields with contractive automorphism and Kaplansky fields. *J. Algebra*, 324(10):2757–2785, 2010.

[B15] Salih Azgin et Lou van den Dries : Elementary theory of valued fields with a valuation-preserving automorphism. *J. Inst. Math. Jussieu*, 10(1): 1–35, 2011.

[B16] John T. Baldwin et Kitty Holland : Constructing ω-stable structures : rank 2 fields. *J. Symbolic Logic*, 65(1):371–391, 2000.

[B17] John T. Baldwin et Saharon Shelah : Model companions of T_{Aut} for stable T. *Notre Dame J. Formal Logic*, 42(3):129–142 (2003), 2001.

[B18] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler : On fields and colorings. *Algebra Logika*, 45(2):159–184, 252, 2006.

[B19] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler : Red fields. *J. Symbolic Logic*, 72(1):207–225, 2007.

[B20] Andreas Baudisch : A new uncountably categorical group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(10):3889–3940, 1996.

[B21] Walter Baur : On the elementary theory of pairs of real closed fields. II. *J. Symbolic Logic*, 47(3):669–679, 1982.

[B22] Martin Bays : *Categoricity Results for Exponential Maps of 1-Dimensional Algebraic Groups & Schanuel Conjectures for Powers and the CIT*. Thèse de doctorat, Oxford University, 2009. URL : `http://www.maths.ox.ac.uk/~bays/dist/thesis`.

[B23] Martin Bays et Jonathan Kirby : Excellence and uncountable categoricity of zilber's exponential fields. Prépublication, arXiv :1305.0493v1, 2013.

[B24] Martin Bays et Boris Zilber : Covers of multiplicative groups of algebraically closed fields of arbitrary characteristic. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4):689–702, 2011.

[B25] Luc Bélair, Angus Macintyre et Thomas Scanlon : Model theory of the Frobenius on the Witt vectors. *Amer. J. Math.*, 129(3):665–721, 2007.

[B26] Itaï Ben Yaacov et Artem Chernikov : An independence theorem for ntp_2 theories. Prépublication, arXiv :1207.0289v1, 2012.

[B27] Franck Benoist, Elisabeth Bouscaren et Anand Pillay : Semiabelian varieties over separably closed fields, maximal divisible subgroups, and exact sequences. Prépublication, arXiv :0904.2083v1, 2009.

[B28] Alexandre Borovik et Ali Nesin : *Groups of finite Morley rank*, volume 26 de *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

[B29] E. Bouscaren et F. Delon : Minimal groups in separably closed fields. *J. Symbolic Logic*, 67(1):239–259, 2002.

[B30] Ronald Bustamante Medina : Differentially closed fields of characteristic 0 with a generic automorphism. *Revista de Matemática : Teoría y Aplicaciones*, 14:81–100, 2007.

[B31] Z. Chatzidakis et A. Pillay : Generic structures and simple theories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 95(1-3):71–92, 1998.

[B32] Zoé Chatzidakis et Ehud Hrushovski : Model theory of difference fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8):2997–3071, 1999.

[B33] Zoé Chatzidakis et Ehud Hrushovski : Difference fields and descent in algebraic dynamics. I. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(4):653–686, 2008.

[B34] Zoé Chatzidakis et Ehud Hrushovski : Difference fields and descent in algebraic dynamics. II. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(4):687–704, 2008.

[B35] Zoé Chatzidakis, Ehud Hrushovski et Ya'acov Peterzil : Model theory of difference fields. II. Periodic ideals and the trichotomy in all characteristics. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 85(2):257–311, 2002.

[B36] Artem Chernikov : Theories without the tree property of the second kind. Prépublication, arXiv :1204.0832v1, 2012.

[B37] Artem Chernikov et Itay Kaplan : Forking and dividing in NTP_2 theories. *J. Symbolic Logic*, 77(1):1–20, 2012.

[B38] Artem Chernikov, Itay Kaplan et Pierre Simon : Groups and fields with ntp2. Prépublication, arXiv :1212.6213v2, 2013.

[B39] Françoise Delon : Types sur $\mathbf{C}((X))$. *In Study Group on Stable Theories (Bruno Poizat), Second year : 1978/79 (French)*, pages Exp. No. 5, 29. Secrétariat Math., Paris, 1981.

[B40] Ju. L. Eršov : On the elementary theory of maximal normed fields. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 165:21–23, 1965.

[B41] David M. Evans : Expansions of fields by angular functions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 7(4):735–750, 2008.

[B42] Joseph Flenner : Relative decidability and definability in Henselian valued fields. *J. Symbolic Logic*, 76(4):1240–1260, 2011.

[B43] Misha Gavrilovich : *Model theory of the universal covering spaces of complex algebraic varieties*. Thèse de doctorat, Oxford University, 2006.

[B44] Misha Gavrilovich : Covers of Abelian varieties as analytic Zariski structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 163(11):1524–1548, 2012.

[B45] Gabriel Giabicani : *Théorie de l'intersection en géométrie aux différences*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Palaiseau, 2011.

[B46] John B. Goode : Hrushovski's geometries. *In Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory (Wendisch-Rietz, 1989)*, volume 104 de *Seminarberichte*, pages 106–117. Humboldt Univ. Berlin, 1989.

[B47] Yuri Gurevich et Peter H. Schmitt : The theory of ordered abelian groups does not have the independence property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(1):171–182, 1984.

[B48] Adam Harris : Categoricity of the two-sorted j-function. Prépublication, arXiv :1304.4787v1, 2013.

[B49] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson : Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries. *J. Reine Angew. Math.*, 597:175–236, 2006.

[B50] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson : *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields*, volume 30 de *Lecture Notes in Logic.* Association for Symbolic Logic, Chicago, IL, 2008.

[B51] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson : Unexpected imaginaries in valued fields with analytic structure. Prépublication, arXiv :1112.4990v1, 2011.

[B52] Assaf Hasson et Martin Hils : Fusion over sublanguages. *J. Symbolic Logic*, 71(2):361–398, 2006.

[B53] Assaf Hasson et Ehud Hrushovski : DMP in strongly minimal sets. *J. Symbolic Logic*, 72(3):1019–1030, 2007.

[B54] Martin Hils : *Fusion libre et autres constructions génériques.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2006. URL : `http://www.logique.jussieu.fr/~hils/`.

[B55] Martin Hils : Higher amalgamation in valued fields. Travail en préparation, 2013.

[B56] Wilfrid Hodges : *Model theory.* Cambridge University Press, 1993.

[B57] Ehud Hrushovski : Strongly minimal expansions of algebraically closed fields. *Israel J. Math.*, 79(2-3):129–151, 1992.

[B58] Ehud Hrushovski : A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic*, 62(2):147–166, 1993. Stability in model theory, III (Trento, 1991).

[B59] Ehud Hrushovski : The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):667–690, 1996.

[B60] Ehud Hrushovski : The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields. *Ann. Pure Appl. Logic*, 112(1):43–115, 2001.

[B61] Ehud Hrushovski : Pseudo-finite fields and related structures. *In Model theory and applications*, volume 11 de *Quad. Mat.*, pages 151–212. Aracne, Rome, 2002.

[B62] Ehud Hrushovski : Valued fields with automorphisms. Notes informelles, 2002.

[B63] Ehud Hrushovski : The elementary theory of the Frobenius automorphisms. Prépublication, arXiv :math/0406514v1, 2004.

[B64] Ehud Hrushovski : Valued fields, metastable groups. Manuscrit, 2004.

[B65] Ehud Hrushovski : Groupoids, imaginaries and internal covers. *Turkish J. Math.*, 36(2):173–198, 2012.

[B66] Ehud Hrushovski et François Loeser : Non-archimedean tame topology and stably dominated types. Prépublication, arXiv :1009.0252v3, 2012.

[B67] Ehud Hrushovski et Boris Zilber : Zariski geometries. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):1–56, 1996.

[B68] Hirotaka Kikyo et Anand Pillay : The definable multiplicity property and generic automorphisms. *Ann. Pure Appl. Logic*, 106(1-3):263–273, 2000.

[B69] Hirotaka Kikyo et Saharon Shelah : The strict order property and generic automorphisms. *J. Symbolic Logic*, 67(1):214–216, 2002.

[B70] Jonathan Kirby : The theory of the exponential differential equations of semiabelian varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, 15(3):445–486, 2009.

[B71] Jonathan Kirby : Finitely presented exponential fields. À paraître dans Algebra Number Theory, arXiv :0912.4019v4, 2011.

[B72] Piotr Kowalski et Anand Pillay : Quantifier elimination for algebraic D-groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(1):167–181 (electronic), 2006.

[B73] Daniel Lascar : Les groupes ω-stables de rang fini. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 292(2):451–462, 1985.

[B74] Michel Laurent : Équations diophantiennes exponentielles. *Invent. Math.*, 78(2):299–327, 1984.

[B75] Angus Macintyre : On ω_1-categorical theories of fields. *Fund. Math.*, 71(1):1–25., 1971.

[B76] Alice Medvedev et Thomas Scanlon : Invariant varieties for polynomial dynamical systems. À paraître dans Ann. of Math. (2), arXiv :0901.2352v3, 2012.

[B77] Koushik Pal : Multiplicative valued difference fields. *J. Symbolic Logic*, 77(2):545–579, 2012.

[B78] Johan Pas : Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions. *J. Reine Angew. Math.*, 399:137–172, 1989.

[B79] Ya'acov Peterzil et Sergei Starchenko : A trichotomy theorem for o-minimal structures. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3):481–523, 1998.

[B80] Anand Pillay et Wai Yan Pong : On Lascar rank and Morley rank of definable groups in differentially closed fields. *J. Symbolic Logic*, 67(3): 1189–1196, 2002.

[B81] Anand Pillay et Thomas Scanlon : Meromorphic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10):3843–3859, 2003.

[B82] Bruno Poizat : Une théorie de Galois imaginaire. *J. Symbolic Logic*, 48(4):1151–1170, 1983.

[B83] Bruno Poizat : *Groupes stables.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, no 2. Bruno Poizat, Lyon, 1987. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique.

[B84] Bruno POIZAT : Le carré de l'égalité. *J. Symbolic Logic*, 64(3):1339–1355, 1999.

[B85] Bruno POIZAT : L'égalité au cube. *J. Symbolic Logic*, 66(4):1647–1676, 2001.

[B86] Dale RADIN : A definability result for compact complex spaces. *J. Symbolic Logic*, 69(1):241–254, 2004.

[B87] Olivier ROCHE : Fusion d'un corps algébriquement clos avec un sous-groupe non-algébrique d'une variété abélienne. Thèse de doctorat, Université Lyon 1, en préparation.

[B88] Thomas SCANLON : A model complete theory of valued D-fields. *J. Symbolic Logic*, 65(4):1758–1784, 2000.

[B89] Thomas SCANLON : Diophantine geometry of the torsion of a Drinfeld module. *J. Number Theory*, 97(1):10–25, 2002.

[B90] Thomas SCANLON : Quantifier elimination for the relative Frobenius. *In Valuation theory and its applications, Vol. II (Saskatoon, SK, 1999)*, volume 33 de *Fields Inst. Commun.*, pages 323–352. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[B91] Thomas SCANLON : Nonstandard meromorphic groups. *In Proceedings of the 12th Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2005)*, volume 143 de *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, pages 185–196 (electronic), Amsterdam, 2006. Elsevier.

[B92] Saharon SHELAH : Simple unstable theories. *Ann. Math. Logic*, 19(3):177–203, 1980.

[B93] Saharon SHELAH : *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 de *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second édition, 1990.

[B94] Saharon SHELAH : Strongly dependent theories. Prépublication, arXiv : math/0504197v4, 2009.

[B95] Pierre SIMON : Lecture notes on NIP theories. Prépublication, arXiv : 1208.3944 [math.LO], 2012.

[B96] Frank WAGNER : Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 66(2): 703–706, 2001.

[B97] Frank O. WAGNER : *Simple theories*, volume 503 de *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[B98] Frank O. WAGNER : Bad fields in positive characteristic. *Bull. London Math. Soc.*, 35:499–502, 2003.

[B99] Umberto ZANNIER : *Some problems of unlikely intersections in arithmetic and geometry*, volume 181 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. With appendixes by David Masser.

[B100] B. ZILBER : Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero. *Ann. Pure Appl. Logic*, 132(1):67–95, 2005.

[B101] Boris ZILBER : Exponential sums equations and the Schanuel conjecture. *J. London Math. Soc. (2)*, 65(1):27–44, 2002.

[B102] Boris ZILBER : Bi-coloured fields on the complex numbers. *J. Symbolic Logic*, 69(4):1171–1186., 2004.

[B103] Boris ZILBER : Covers of the multiplicative group of an algebraically closed field of characteristic zero. *J. London Math. Soc. (2)*, 74(1):41–58, 2006.

[B104] Boris ZILBER : *Zariski geometries*, volume 360 de *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Geometry from the logician's point of view.

[B105] Boris ZILBER : The theory of exponential sums. Prépublication, 2011.